КАТО, О.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ.

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛ И САМООБРАЗОВАНИЯ.

Перевод с немецкого
под ред. Н. П. ТАРАСОВА.

Государственное Техническое Издательство
Москва — 1926 г.

КАТО, О.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ.

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛ И САМООБРАЗОВАНИЯ.

Перевод с немецкого под ред. Н. П. ТАРАСОВА.

осударственное Техническое Издательство.
Москва — 1926 г.

Государственное Техническое Издательство.

Москва, Ильинка, Юшков пер., д. 6, тел. 2-56-84.

Александров, В. А., проф. Новые меры. Практическое руководство для перехода со старых мер на новые. С таблицами перевода мер и цен. (Карманн. справочник). М. 1924 г. 4-е изд., исправл. 128 стр. 19 рис. Ц. 35 к.

Гобель, В. Я. Метрическая система мер и десятичные дроби. Самоучитель для взрослых. М. 1926 г. 48 стр. Ц. 30 к.

Его же. Сборник примеров и задач на новые меры. Для школ и самообучения. М. 1926 г. 36 стр. Ц. 25 к.

Евдокимов, В. А. Популярное руководство современной фотографии. М. 1926 г. Изд. 3-е, исправл. и дополн. 230 стр. 35 рис. Ц. 1 р. 40 к.

Его же. Фотографическая ретушь и раскраска фотографий и диапозитивов. С подробным описанием способа раскраски без кистей. М. 1925 г. Изд. 2-е. 88 стр. 5 рис. Ц. 40 к.

Его же. Фото-увеличение. Полное руководство к производству увеличенных снимков при дневном и искусственном освещении и устройство простых увеличительных приборов без конденсаторов. М. 1926 г. Изд. 2-е, исправл. 116 стр. 27 рис. Ц. 65 к.

Ермолаев, И. Г. Как устроить добровольную пожарную дружину в деревне. С приложением инструкции о введении в действие нормального устава добровольных пожарных организаций и устава добровольных пожарных дружин. М. 1926 г. 60 стр. 62 рис. Ц. 50 к.

Като, О. Геометрия. Планиметрия (Печат.).

Его же. Арифметика (букв. исчисл.) (печат.)

Куликовский, Г. И. Копирование посредством света: карт, планов, чертежей и т. п. на солях железа, серебра, хрома. Цианотипия, каллитипия, негрография, аргентотипия. М. 1925 г 48 стр. 19 рис. Ц. 30 к.

Куликов, С. М. Руководство для лекторов-пропагандистов метрической системы. М. 1926 г. 48 стр. Ц. 35 к.

Стеклицков Ф. Ф.

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

1926

А. — 1. КОНСПЕКТИВНАЯ СЕРИЯ. № XIII—12.

КАТО, О.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ.

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛ И САМООБРАЗОВАНИЯ.

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
ПОД РЕД. Н. П. ТАРАСОВА.

Государственное Техническое Издательство.
Москва — 1926 г.

Типо-Литография
„КРАСНЫЙ ПЕЧАТНИК"
ГОСТЕХИЗДАТА.
ЛЕНИНГРАД.
Международный, 75.

Предисловие к русскому изданию.

В русском издании предлагаемой книги, по сравнению с немецким оригиналом, сделаны лишь небольшие изменения: опущены формулы малоупотребительные; привнесены, наоборот, формулы, имеющие большое применение и почему-либо не помещенные в немецком тексте; введены обозначения, принятые в русской литературе; не приведено предисловия автора к немецкому изданию, как не представляющее интереса для русского читателя.

Так как настоящая книга является только справочником, то все формулы даны без выводов и объяснений. Выводы же и объяснения приведены в соответствующих выпусках этой серии.

Н. Тарасов.

Арифметика.

Сложение и вычитание.

$a+b=s$ Соединение нескольких чисел в одно число называется действием **сложения**. Числа, которые даны (a, b), т.-е. те числа, которые должны быть соединены в одно число, называются **слагаемыми**, а искомое число (s), т.-е. то число, в которое должны быть соединены данные числа, называется суммою.

$a-b=d$. Вычесть одно число из другого, это значит найти такое третье число, которое будучи сложено с первым — даст второе. Искомое число (d) называется **разностью**, число из которого производится вычитание (a), называется **уменьшаемым**, а число, которое вычитается (b) — **вычитаемым**.

1) $a+b=b+a$

2) $(a+b)+c=(a+c)+b=$
$=(b+a)+c=(b+c)+a=(c+a)+$
$+b=(c+b)+a=a+b+c$

3) $(a+b)+(c+d)=a+b+c+d$

4) $(a-b)+b=a-b+b=a$

5) $(a+b)-b=a+b-b=a$

6) $a-(b+c)=a-b-c$

7) $a-b-c=a-c-b=a-(b+$
$+c)=a-(c+b)$

8) $a-(b-c)=a-b+c$

9) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-$
$-(b+d)$

10) $a-b=(a+c)-(b+c)=$
$(a-c)-(b-c)$

11) $a-a=0$

12) $a+0=a$

13) $a-0=a$

Если $a>b$, то

14) $(+a)-(+b)=+(a-b)$

15) $(+a)-(-b)=+(a+b)$

16) $(-a)-(+b)=-(a+b)$

17) $(-a)-(-b)=-(a-b)$

18) $(+a)+(-a)=a-a=0$

19) $a+a+a+a=4a$

20) $-a-a-a=-3a$.

Умножение.

Умножить одно число на другое, это значит составить из первого числа третье число так, как второе составлено из единицы.

Действие умножения обозначается следующим образом: $a \times b$, или $a \cdot b$ или просто $ab = c$.

То число, которое умножается (a), называется **множимым**; то число, на которое умножается (b), называется **множителем**; то число, которое получается в результате перемножения первых двух, называется **произведением** (c). Весьма часто множимое и множитель называют одинаково **сомножителями**.

1) $1a = a$; $3a = a + a + a$

2) $(a + b)c = ac + bc$

3) $(a - b)c = ac - bc$

4) $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + ad + bc + bd$

5) $(a - b) \cdot (c + d) = (a - b)c + (a - b)d = ac + ad - bc - bd$

6) $(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d = ac - ad + bc - bd$

7) $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d = ac - ad - bc + bd$

8) $(a + 1)b = ab + b$

9) $(a - 1)b = ab - b$

10) $(a + b)(c - 1) = ac + bc - a - b$

11) $(a - b)(c + 1) = ac - bc + a - b$

12) $(a - b)(c - 1) = ac - bc - a + b$

13) $ab = ba$

14) $a \cdot 0 = 0$

15) $(+a) \cdot (+b)$ или $(-a) \cdot (-b) =$ $= +ab.$

16) $(+a) \cdot (-b)$ или $(-a) \cdot (+b) =$ $= -ab.$

Деление.

Действие деления обозначается следующим образом: $a : b = q$ или $\frac{a}{b} = q$.

Разделить одно число на другое, это значит найти такое третье число (q — частное), которое, будучи умножено на второе (b — делитель), даст первое (a — делимое).

1) $\frac{a}{b} \cdot b$ или $\frac{ab}{b} = a$

2) $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot a$

3) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

4) $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c}$

5) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

6) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

7) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

8) $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

9) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$

10) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$

11) $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$

12) $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$,

13) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

14) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = -\frac{a-b}{ab}$

15) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

16) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

17) $\frac{a}{a+b} + 1 = \frac{2a+b}{a+b}$

18) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$

19) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$

20) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{b+a}{b-a}$

21) $\dfrac{0}{a}=0$

22) $\dfrac{a}{0}=\infty$

23) $\dfrac{+a}{+b}$ или $\dfrac{-a}{-b}=+\dfrac{a}{b}$

24) $\dfrac{+a}{-b}$ или $\dfrac{-a}{+b}=-\dfrac{a}{b}$.

Возведение в степень.

$a^4=aaaa$; $a^1=a$; $1^a=1$.

Возвести число a в степень n, это значит умножить число a само на себя n раз (число n предполагается целым и положительным). Число a называется основанием степени, n — показателем степени; число a^n — степенью.

1) $(+a)^n=+a^n$

2) $(-a)^n=+a^n$, если n есть число четное,

3) $(-a)^n=-a^n$, если n есть число нечетное,

4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

5) $(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

7) $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

8) $a^{n+1} : a^n = a$

9) $a^n : a^{n-1} = a$

10) $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

11) $(a^m)^n = a^{mn}$

12) $a^0 = 1,$

13) $3a^0 = 3;\ (3a)^0 = 1,$

14) $a^{-1} = \frac{1}{a};\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (см. равенство 10)

15) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{mx}{ny}}$

16) $(a^{n+1})^2 = a^{2n} \cdot a^2$

17) $a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$

18) $a^{-x} \cdot a^{-y} = a^{-(x+y)}$

19) $\frac{a^x}{a^{-y}} = a^{x+y}$

20) $\frac{a^{-x}}{a^y} = \frac{1}{a^{x+y}}$

21) $(a^{-x})^y = a^{-xy}$

22) $(a^x)^{-y} = a^{-xy}$

23) $(a^{-x})^{-y} = a^{xy}$

24) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$

25) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

26) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

27) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

28) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

29) $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

30) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

31) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

32) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

33) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

34) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

35) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Корни.

Извлечь корень степени n из числа a — это значит найти такое число b (корень), которое, будучи возвышено в степень n (показатель корня), даст число a (подкоренное количество).

Действие извлечение корня изображается следующим образом: $\sqrt[n]{a} = b$.

В силу определения извлечения корня — между числами a, b и n существуют следующие соотношения:

$$\sqrt[n]{a} = b; \qquad b^n = a; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

1) $\sqrt[n]{1} = 1; \qquad \sqrt[n]{0} = 0; \qquad \sqrt[2n+1]{1} = 1;$

$$\sqrt[2n+1]{-1} = -1$$

2) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$$

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

5) $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

6) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

7) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

8) $\sqrt{a^2} = \pm a$, $\sqrt{(a+b)^2} = \pm(a+b)$.

Неверные равенства:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b; \quad \sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$$

9) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

10) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-b$

11) $(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b) = a-b^2$

12) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a\pm 2\sqrt{ab}+b$.

Пример извлечения квадратного корня:

$$\sqrt{12'53'16} = 354$$

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ \hline 65 & 353 \\ 5 & 325 \\ \hline 704 & 2816 \\ 4 & 2816 \\ \hline & .... \end{array}$$

Освобождение от иррациональности в знаменателе:

13) $\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$;

$$\frac{x}{\sqrt[n]{a}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$$

14) $\frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{x(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b}$.

Степени с дробными показателями.

1) $a^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{a^m}$; $\quad a^{-\frac{m}{x}} = a^{\frac{-m}{x}} =$

$= a^{\frac{m}{-x}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{x}}} = \sqrt[x]{a^{-m}} = \sqrt[-x]{a^m} =$

$$= \frac{1}{\sqrt[x]{a^m}}$$

2) $1^{\frac{m}{n}} = 1$; $\quad 0^{\frac{m}{n}} = 0$

3) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$

4) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$

5) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

7) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$.

Мнимые и комплексные числа.

1) $\sqrt{-1} = i$ (мнимая единица).

2) $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$ (мнимое число).

3) $a + bi$ (комплексное число).

4) $$\left\{\begin{array}{ll} i = i & i^{4n} = +1 \\ i^2 = -1 & i^{4n+1} = +i \\ i^3 = -i & i^{4n+2} = -1 \\ i^4 = +1 & i^{4n+3} = -i \end{array}\right.$$

5) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{ab} =$
$= -\sqrt{ab}$

6) $(\sqrt{-a})^2 = -a$

7) $\frac{1}{i} = -i$

8) $\frac{a}{\sqrt{-a}} = -\sqrt{-a}$

9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$

10) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

11) $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

12) $\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$,

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

13) $a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Логарифмы.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвысить основание a, чтобы получить число b. Если обозначить логарифм числа b через c, то между числами a, b и c будут существовать следующие соотношения:

$$\lg_a b = c; \quad a^c = b.$$

1) $\lg(ab) = \lg a + \lg b$

2) $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

3) $\lg a^n = n \lg a$

4) $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}$

5) $\lg_a a = 1$

6) $\lg_a 1 = 0$

7) $\lg_a 0 = \pm\infty$; $+\infty$, если $a > 1$ и $-\infty$, если $a < 1$.

За основание десятичных или Бригговых логарифмов принимается число 10; вместо $\lg_{10} a$ пишется обыкновенно просто $\lg a$. Основанием натуральных логарифмов служит число $e = 2{,}7\,1828\,1828\,459...$ Вместо $\lg_e a$, пишется обыкновенно сокращенно $\ln a$.

8) Обращение десятичного логарифма в натуральный:

$$a)\ \ln 10 = \lg_e 10 = \frac{\lg_{10} 10}{\lg_{10} e} =$$

$$= \frac{1}{0{,}43429...} = 2{,}30259...$$

$$b)\ \ln a = \lg_e a = \frac{\lg_{10} a}{\lg_{10} e} = \lg_{10} a \cdot 2{,}30259..$$

Действия	16	2	Результат
Сложение $16 + 2 = 18$	Слагаемое	Слагаемое	Сумма
Вычитание $16 - 2 = 14$	Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
Умножение $16 \cdot 2 = 32$	Множимое (сомножитель)	Множитель (сомножитель)	Произведение
Деление $16 : 2 = 8$	Делимое	Делитель	Частное
Возведен. в степень $16^2 = 256$	Основание	Показатель степени	Степень
Извлечение корня $\sqrt[2]{16} = 4$	Подкоренное количество	Показатель корня	Корень
Логарифмирование $\lg_2 16 = 4$	Логарифмируемое число	Основание	Логарифм

Пропорции.

Равенство двух отношений, $a:b=$ $=c:d$, называется пропорцией. Числа a, b, c и d называются членами пропорции; члены a и d называются крайними, а члены b и c средними членами пропорции.

Из пропорции $a:b=c:d$ следует:

1) $a:c=b:d$
$b:a=d:c$
$b:d=a:c$
$c:a=d:b$
$c:d=a:b$
$d:b=c:a$
$d:c=b:a$

2) $ad=bc$

3) $a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$; $b=\frac{ad}{c}$;

$$c=\frac{ad}{b}$$

4) $ma:mb=c:d$; $ma:b=mc:d$ и. т. д.

5) $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=c:d$; $\frac{a}{n}:b=\frac{c}{n}:d$ и т. д.

6) $a^n:b^n=c^n:d^n$

7) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$

8) Производные пропорции:

a) $a:(a+b)=c:(c+d)$

или

$$(a+b):b=(c+d):d$$

или

$$(a+b):a=(c+d):c;$$

b) $a:(a-b)=c:(c-d)$

$$(a-b):a=(c-d):c$$

c) $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

9) Из непрерывной пропорции

$$a:x=x:b$$

следует:

$$x=\sqrt{ab}$$

(среднее геометрическое).

Средним арифметическим двух чисел a и b называется половина суммы этих чисел:

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

10) Из пропорций $a:b=c:x$

$$a:b=c:y$$

следует: $x=y$.

11) Из пропорции $a:b=c:d$,

при условии $a \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} b$,

имеем: $c \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} d$

12) Из пропорций: $a : b = c : d$
$e : f = g : h$
будем иметь: $ae : bf = cg : dh$
и

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}.$$

13) Из пропорций $a : b = c : d$
$x : b = c : y$
следует: $a : x = y : d$.

Арифметическая прогрессия.

Арифметической прогрессией называется такой ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется своему предшествующему, сложенному с одним и тем же, постоянным для этого ряда числом, называемым разностью прогрессии.

Обозначения: a_1 — первый член, d — разность прогрессии; a_n — n-ый член прогрессии; n — число членов прогрессии; s_n — сумма n членов прогрессии.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)\,d]\,n}{2}.$$

Применяя эти формулы к ряду, составленному из последовательных целых чисел ($a=1$, $d=1$), будем иметь:

$$a_n = n;\ s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для ряда нечетных чисел ($a=1$, $d=2$) получим:

$$a_n = 2n-1;\ \ s_n = n^2,$$

и для ряда четных чисел ($a=2$; $d=2$):

$$a_n = 2n;\ s_n = n(n+1).$$

I. Формулы для вычисления суммы s_n:

1) Даны a_1, d, n:

$$s_n = \frac{[2a_1+(n-1)d]\,n}{2}.$$

2) Даны a_1, d, a_n:

$$s_n = \frac{a_n+a_1}{2} + \frac{(a_n+a_1)(a_n-a_1)}{2d}.$$

3) Даны a_1, n, a_n:

$$s_n = \frac{(a_1+a_n)\,n}{2}.$$

4) Даны d, n, a_n:

$$s_n = \frac{[2a_n - (n-1)d]\,n}{2}$$

II. Формулы для вычисления n-ого члены прогрессии:

1) Даны a_1, d, n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

2) Даны a_1, d, s_n:

$$a_n = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{(a_1 - \frac{d}{2})^2 + 2ds_n}\,.$$

3) Даны a_1, n, s_n:

$$a_n = \frac{2s_n}{n} - a_1\,.$$

4) Даны d, n, s_n:

$$a_n = \frac{s_n}{n} + \frac{(n-1)d}{2}\,.$$

III. Формулы для вычисления первого члена прогрессии (a_1):

1) Даны d, n, a_n:

$$a_1 = a_n - (n-1)d.$$

2) Даны d, n, s_n:

$$a_1 = \frac{s_n}{n} - \frac{(n-1)d}{2}\,.$$

3) Даны d, a_n, s_n:

$$a_1 = \frac{d}{2} \pm \sqrt{(a_n + \frac{d}{2})^2 - 2ds_n}\,.$$

4) Даны n, a_n, s_n:

$$a_1 = \frac{2s_n}{n} - a_n\,.$$

IV. Формулы для вычисления разности d.

1) Даны a_1, n, a_n:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}\,.$$

2) Даны a_1, n, s_n:

$$d = \frac{2(s_n - na_1)}{n(n-1)}\,.$$

3) Даны a_1, n_n, s_n:

$$d = \frac{(a_n + a_1)(a_n - a_1)}{2s_n - (a_n + a_1)}\,.$$

4) Даны n, a_n, s_n:

$$d = \frac{2(na_n - s_n)}{n(n-1)}\,.$$

V. Формулы для вычисления числа членов n:

1) Даны a_1, d, a_n:

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d}.$$

2) Даны a_1, d, s_n:

$$n = \frac{(d - 2a_1) \pm \sqrt{(2a_1 - d)^2 + 8ds_n}}{2d}.$$

3) Даны a_1, a_n, s_n:

$$n = \frac{2s_n}{a_1 + a_n}.$$

4) Даны d, a_n, s_n:

$$n = \frac{(2a_n + d) \pm \sqrt{(2a_n + d)^2 - 8ds_n}}{2d}.$$

Геометрическая прогрессия.

Геометрической прогрессией называется ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется своему предшествующему, умноженному на одно и то же, постоянное для данного ряда, число, называемое знаменателем прогрессии.

Обозначения: a_1 — первый член прогрессии; q — знаменатель прогрессии; n — число членов прогрессии; a_n — n-ый член прогрессии; s_n — сумма n членов.

1) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2) $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1} = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1} =$

$$= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

3) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots =$

$$= \frac{1}{1 - x}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 + x}$$

(для $|x|$ *) < 1)

$$1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} - \ldots =$$

$$= \frac{a}{a + x} \text{ (для } \left|\frac{x}{a}\right| < 1)$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \ldots =$$

$$= \frac{a}{a - x} \text{ (для } \left|\frac{x}{a}\right| < 1).$$

---

*) Символом $|x|$ обозначается абсолютная величина числа x.

I. Формулы для вычисления суммы s_n:

1) Даны a_1, q, n:

$$s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

2) Даны a_1, q, a_n:

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

3) Даны a_1, n, a_n:

$$s_n = \frac{\sqrt[n-1]{a_n^n} - \sqrt[n-1]{a_1^n}}{\sqrt[n-1]{a_n} - \sqrt[n-1]{a_1}}.$$

4) Даны q, n, a_n

$$s_n = \frac{a_n (q^n - 1)}{(q - 1)\, q^{n-1}}.$$

II. Формулы для вычисления n-ого члена (a_n):

1) Даны a_1, q, n:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

2) Даны a_1, q, s_n:

$$a_n = \frac{a_1 + (q-1)s_n}{q}.$$

3) Даны q, n, s_n:

$$a_n = \frac{s_n\,(q-1)\,q^{n-1}}{q^n - 1}.$$

III. Формулы для вычисления первого члена прогрессии:

1) Даны q, n, a_n:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}.$$

2) Даны q, n, s_n:

$$a_1 = \frac{(q-1)\,s_n}{q^n - 1}.$$

3) Даны q, a_n, s_n:

$$a_1 = a_n q - (q-1)\,s_n.$$

IV. Формулы для вычисления знаменателя прогрессии (q):

1) Даны a_1, n, a_n:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}.$$

2) Даны a_1, a_n, s_n:

$$q = \frac{s_n - a_1}{s_n - a_n}.$$

V. Формулы для вычисления числа членов (n):

1) Даны a_1, q, a_n:

$$n = \frac{\lg a_n - \lg a_1}{\lg q} + 1.$$

2) Даны a_1, q, s_n:

$$n = \frac{\lg [a_1 + (q-1) s_n] - \lg a_1}{\lg q}.$$

3) Даны a_1, a_n, s_n:

$$n = \frac{\lg a_n - \lg a_1}{\lg (s_n - a_1) - \lg (s_n - a_n)} + 1.$$

4) Даны q, a_n, s_n:

$$n = \frac{\lg a_n - \lg [a_n q - (q-1) s_n]}{\lg q} + 1$$

Проценты.

Обозначения: a — капитал; z — процентные деньги; p — проценты; t — время в годах:

$$1)\ z = \frac{apt}{100}$$

$$2)\ a = \frac{100\,z}{pt}$$

$$3)\ p = \frac{100\,z}{at}$$

$$4)\ t = \frac{100\,z}{ap}$$

Вычисление сложных процентов и рент.

a — первоначальный капитал; b — наращенный капитал; p — проценты; q $\left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$ процентный множитель; t — время в годах; r — рента.

1) Формула для вычисления суммы в которую обратится капитал через t лет, отданный в рост по p сложным процентам:

$$b = aq^t.$$

Отсюда следует:

$$a = \frac{b}{q^t};$$

$$q = \sqrt[t]{\frac{b}{a}};$$

$$t = \frac{\lg b - \lg a}{\lg q}.$$

2) Формула для вычисления суммы в которую обратится первоначальный капитал, отданный в рост по p сложным процентам, если в конце каждого года к капиталу будет причисляться (или от него отниматься) рента r. Если первоначальный капитал будет исчерпан в течение t лет, то $b=0$. В общем же случае:

$$b = aq^t \pm r\frac{q^t - 1}{q-1}.$$

3) Формула для вычисления суммы, которая получится в конце t-ого года, если в конце каждого года будет дополнительно вноситься сумма в r рублей:

$$b = \frac{r(q^t - 1)}{q - 1}.$$

Если взносы будут производиться в начале каждого года, то формула будет иметь вид:

$$b = \frac{rq(q^t - 1)}{q - 1}.$$

4) Формула погашения капитала повторной рентой в конце каждого года n раз:

$$a = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$$

5) Формула погашения капитала постоянной рентой:

$$a = \frac{r}{q-1}, n = \infty.$$

6) Формула погашения, когда капитал a должен быть погашен или уплачен в t лет в размере $x\%$:

$$aq^t = a\frac{x}{100}\cdot\frac{q^t-1}{q-1}.$$

q — здесь тот же множитель, как и выше, следовательно, и размер процентов тот же, т.-е. p.

Арифметические ряды высших порядков.

1) Фигурные числа:

1 порядка:

1 2 3 4 5 6 7 8 . . .

2 порядка:

1 3 6 10 15 21 28 . . .

(тригональные числа)

3 порядка:

1 4 10 20 35 56 84 120 . . .

(пирамидальные числа)

4 порядка:

1 5 15 35 70 126 210 330 . . .

n — ый член ряда фигурных чисел: 1 порядка:

$$[Z_n]_{\mathrm{I}} = n;$$

2 порядка:

$$[Z_n]_{\mathrm{II}} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2};$$

3 порядка:

$$[Z_n]_{\mathrm{III}} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

p—ого порядка:

$$[Z_n]_p = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)\,p}.$$

2) Формула суммы квадратов n первых чисел:

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

3) Формула суммы кубов n первых чисел:

$$\sum_1^n n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right]^2.$$

Теория соединений.

I. Перестановки. Число перестановок из n различных элементов определяется формулой:

1) $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot (n-1) n =$
$= n!$ (читается n — факториал).

Если среди n элементов найдутся α элементов одинаковых между собой, далее β одинаковых и γ тоже одинаковых между собой, то число перестановок выразится формулой:

$$P_{(\alpha, \beta, \gamma)}(n) = \frac{n!}{\alpha! \ \beta! \ \gamma!}.$$

Если n элементов разбиваются на две группы из: p и $n-p$ одинаковых между собой элементов, то формула числа перестановок будет иметь вид

$$P_{(p, n-p)}(n) = \frac{n!}{p! \ (n-p)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)}{p!}$$

II. Сочетания. Число сочетаний из n элементов по m элементов в каждой группе (без повторений) определяется формулой:

$$1)\ C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot m} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^{n-m}.$$

Число сочетаний из n элементов по m в каждой группе — с повторениями — выражается формулой:

$$2)\ C'^m_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

III. Число размещений из n элементов по m элементов в каждой группе без повторений определяется формулой:

$$1)\ A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Число размещений из n элементов по m в каждой группе — с повторениями — выразится формулой:

$$2)\ A'^m_n = n^m.$$

Разложение в ряды степеней двучленов.

(Биномиальные ряды.)

1) Показатель степени n есть целое положительное число.

$$\text{a)}\ (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + {}$$

$$+ C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots +$$

$$+ C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-3} a^3 b^{n-3} + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} +$$

$$+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} a^{n-m} b^m +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-3)} a^3 b^{n-3} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)} a^2 b^{n-2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2}{1\cdot 2\dots(n-1)}ab^{n-1}+b^n=$$

$$=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}a^{n-m}b^m+$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^{n-3}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n.$$

b) $(a-b)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2-$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+-+-\dots$$

c) $(1\pm a)^n=1\pm\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2\pm$

$$\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3+\dots+(\pm 1)^n a^n.$$

2) Для дробного положительного или отрицательного n, при условии

$-1 < x < +1$, выражение $(1+x)^n$ разлагается в бесконечный ряд следующего вида:

$$(1+x)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \ldots$$

Разложение в ряды показательных и логарифмических функций.

1) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$ (сходится при любом значении x).

2) $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots =$

$= 2,7\,1828\,1828\,45 \ldots$

3) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ (сходится при любом значении x).

4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$ (сходится при условии $-1<x\leq+1$).

5) $\ln(1-x)=$
$=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots$ (сходится при условии $-1\leq x<+1$).

6) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\right.$ $\left.+\frac{x^7}{7}+\dots\right\}$ (сходится при условии $1>x>-1$).

7) $\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\right.$ $\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\dots\right]$ (сходится при условии $0<x<\infty$).

8) $\ln(a+b)-\ln a=$

$$=2\left[\frac{b}{2a+b}+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5+\dots\right].$$

Разложение в ряды тригонометрических и обратных круговых функций.

1)
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

x измеряется в дуговых мерах. Сходятся для всех значений x $(-\infty < x < +\infty)$.

$$\cos x + i \sin x = {}^{ix}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(\cos x \pm i \sin x)^n =$$
$= \cos nx \pm i \sin nx$ (теорема Моавра).

2) $$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$
(сходится при условии $1 > x > -1$).

3) $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

(сходится при условии $1 \geqslant x \geqslant -1$).

4) $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

(ряд Лейбница).

Для вычисления числа π можно пользоваться следующими формулами:

a) $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$

b) $\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} -$

$$-4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515}.$$

Уравнения.

I. Уравнения первой степени.

a) С одним неизвестным.

1) Из уравнения:	получаем:
$x + a = b$	$x = b - a$
$x - a = b$	$x = a + b$
$ax = b$	$x = \frac{b}{a}$
$\frac{x}{a} = b$	$x = ab$
$ax = 0$	$x = 0$
$b(x - a) = 0$	$x = a$
$ax + bx + cx = 0$	$x = 0$
$a(x - d) + b(x - d) = c(x - d)$	$x = d$

b) Система уравнений с двумя неизвестными.

Из системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$ следует

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

1) Способ сравнения:

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}.$$

2) Способ подстановки:

$$ax + b \cdot \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c.$$

3) Способ сложения и вычитания:

$$\left|\begin{array}{l} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ a_1bx + bb_1y = c_1b \\ \hline x(ab_1 - a_1b) = cb_1 - c_1b \\ \qquad\qquad x = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}. \end{array}\right.$$

II. Уравнения второй степени.

1) Неполные квадратные уравнения:

a) $ax^2 + c = 0$; $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

b) $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$;

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

c) $ax^2 = 0$; $x = 0$.

2) Полные квадратные уравнения:

a) $x^2 + px + q = 0$;

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

b) $ax^2 + bx + c = 0$;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

III. Уравнения третьей степени:

a) Из уравнения $x^3 = a$ получаем:

$$x_1 = \sqrt[3]{a},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\,(-1 + \sqrt{-3}),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}\,(-1 - \sqrt{-3}).$$

b) Полное кубическое уравнение:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Если положим $x = y - \frac{1}{3}a$, то данное уравнение примет вид:

$$y^3 + 3py + 2q = 0;$$

полагая теперь $y = u + v$ и $u^3 + v^3 + 2q = 0$, будем иметь:

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}\,.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= u + v, \\ y_2 &= \frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 &= -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v). \end{aligned}\right\} \text{(Формулы Кардана)}$$

Геометрия на плоскости (планиметрия).

1. Углы. Все прямые углы (d) равны между собой.

Прямой угол является мерой для других углов. Угол, меньший прямого, называется острым; угол, больший прямого,—тупым.

Смежные углы в сумме составляют два прямых угла ($2\,d$).

Вертикальные углы равны между собой.

Если две прямые линии будут пересечены третьею, то образующиеся при этом пересечении углы будут обладать следующими свойствами:

a) будут равны попарно соответственные углы;

b) будут равны попарно внешние накрестлежащие углы;

c) будут равны попарно внутренние накрестлежащие углы.

d) Сумма внутренних односторонних углов будет составлять $2d$;

e) сумма внешних односторонних углов будет составлять $2\,d$.

2. Треугольник. Во всяком треугольнике:

сумма длин двух сторон больше третьей;

разность длин двух сторон меньше третьей;

внешний угол равен сумме двух внутренних углов, с ним несмежных;

сумма углов равна $2\,d$;

В равнобедренном треугольнике:

углы при основании равны;

высота делит основание и угол при вершине пополам.

Равнобедренный треугольник вполне определяется:

a) при помощи двух сторон (неравных);

b) при помощи стороны и одного угла.

В равностороннем треугольнике каждый из углов равен $\frac{2}{3} d =$ $= 60°$.

Равносторонний треугольник определяется вполне при помощи одной стороны.

В прямоугольном треугольнике:

квадрат гипотенузы равен сумме квадратов двух катетов (теорема Пифагора);

квадрат высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равен произведению длин отрезков, на которые высота делит гипотенузу.

Прямоугольный треугольник вполне определяется:

a) при помощи двух сторон;

b) при помощи стороны и одного из острых углов.

Два треугольника равны, если имеют соответственно равными:

a) по две стороны и углу, заключенному между ними;

b) по одной стороне и двум прилежащим углам;

c) если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого.

Треугольник вполне определяется при помощи задания трех составных частей, среди которых должна быть дана по крайней мере хоть одна сторона.

Во всяком треугольнике против бо́льшей стороны лежит и бо́льший угол.

3) Многоугольник. Число диагоналей, проведенных из одной вершины многоугольника, имеющего n сторон, равно $n-3$; эти диагонали разбивают многоугольник на $n-2$ треугольника.

Сумма углов многоугольника, имеющего n сторон,—составляет $2d\,(n-2)$.

В правильном многоугольнике каждый из углов равен $\frac{2n-4}{n}d$.

Правильный многоугольник вполне определяется заданием одной из сторон.

4) Четыреугольник. Во всяком четыреугольнике сумма углов равна $4\,d$.

Четыреугольник определяется заданием пяти составных элементов.

5) Трапеция. Во всякой трапеции сумма углов, прилежащих к непараллельным сторонам, составляет попарно по $2d$.

Трапеция определяется заданием четырех составных элементов.

6) Параллелограмм. В параллелограмме:

противоположные углы попарно равны;

противоположные стороны равны;

диагонали в точке пересечения взаимно делятся пополам;

каждая из диагоналей делит параллелограмм на два равных треугольника.

Параллелограмм определяется заданием трех составных элементов.

7) Прямоугольник. Во всяком прямоугольнике диагонали равны.

Прямоугольник определяется заданием двух неравных сторон.

8) Ромб. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и разбивают ромб на четыре равных треугольника.

Ромб определяется заданием двух составных частей.

9) Квадрат. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и разбивают квадрат на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника.

Квадрат определяется при помощи задания только одной стороны.

10) Параллелограммы, имеющие одинаковые основания и равные высоты,—равновелики (т.-е. имеют равные площади).

Треугольники, имеющие одинаковые основания и равные высоты—равновелики.

Треугольник и параллелограмм равновелики, если последний имеет высоту, равную высоте треугольника, а основание его равно половине основания треугольника; или высота его составляет половину высоты треугольника, а основание равно основанию треугольника.

11) Круг. Центр круга лежит на перпендикуляре, восставленном к хорде и проходящем через ее середину.

Хорды одинаковой длины отстоят на равных расстояниях от центра.

Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, имеют одинаковые длины от общей точки, из которой они выходят, до точек касания.

Центральный угол вдвое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу.

Во всяком выпуклом вписанном четыреугольнике сумма противоположных углов равна $2d$.

Во всяком выпуклом описанном четыреугольнике суммы противоположных сторон равны.

12) Пропорциональность. Прямая, проведенная в треугольнике параллельно какой-нибудь из сторон, рассекает две другие стороны на части пропорциональные.

Биссектриса любого угла треугольника, как внутреннего, так и внешнего, пересекает противоположную сторону или ее продолжение в такой точке, расстояния которой от конца этой стороны пропорциональны соответственно другим сторонам треугольника.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13) Подобие. Два треугольника подобны, если

а) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между этими сторонами, равны;

b) два угла одного соответственно равны двум углам другого;

c) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам.

Высота, опущенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, разбивает треугольник на два треугольника, подобных между собой, и подобных, каждый в отдельности, всему основному треугольнику.

Высота прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы.

Каждый из катетов прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком.

Периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны.

14) П р о п о р ц и о н а л ь н о с т ь п л о щ а д е й. Треугольники или параллелограммы, имеющие одинаковые высоты, относятся как их основания, и наоборот.

Треугольники или параллелограммы относятся как произведения их высот на основания.

Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

15) Пропорциональные линии в круге. Произведение диагоналей вписанного выпуклого четыреугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема Птоломея).

Если две хорды пересекают друг друга, то произведение отрезков одной из них равно произведению отрезков другой.

Если из одной точки проведены к кругу две секущие, то произведения каждой из секущих на ее внешнюю часть равны.

Если из одной и той же точки проведены к кругу секущая и касательная, то длина касательной есть средняя пропорциональная между длиной секущей и ее внешней частью.

16) Геометрические места. I. Геометрическое место точек:

a) отстоящих на одинаковом расстоянии x от одной и той же данной точки P, есть окружность радиуса x с центром в точке P;

b) отстоящих на одинаковом расстоянии от двух данных точек P и Q, есть перпендикуляр, проходящий через середину отрезка PQ;

c) отстоящих на одинаковом расстоянии x от одной и той же прямой L,— суть две параллельные прямые, проходящие на расстоянии x от прямой L;

d) отстоящих на одинаковом расстоянии от двух параллельных прямых L и G, есть прямая, параллельная двум данным и проходящая по середине расстояния между L и G;

e) отстоящих на одинаковом расстоянии от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

II. Геометрическое место центров окружностей:

a) касающихся данной прямой L в одной и той же точке P, есть перпендикуляр к прямой L, проходящий через точку P;

b) имеющих один и тот же радиус r и проходящих через одну и ту же данную точку P, есть окружность радиуса r, с центром в точке P;

c) проходящих через две данные точки P и A, есть перпендикуляр, проходящий через середину отрезка PA;

d) касающихся сторон какого-нибудь угла, есть биссектриса этого угла;

e) касающихся окружности C в одной и той же точке P, есть прямая, являющаяся продолжением отрезка соединяющего центр окружности C с точкой P.

III. Геометрическое место вершин прямого угла всех прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, есть окружность, построенная на данной гипотенузе как на диаметре.

Геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что касательные, проведенные из них к данной окружности, имеют одну и ту же длину, — есть окружность, концентрическая данной окружности.

Геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание и одинаковые площади, есть прямая, параллельная данному основанию.

Геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание и одинаковые углы при вершинах, есть дуга окружности, дополняющая до полной окружности дугу, на которую опирается данный угол.

Вычисление площадей.

1) Площадь параллелограмма $= gh$ (g — основание, h — высота).

2) Площадь прямоугольника $= ab$ (a и b — стороны прямоугольника).

3) Площадь квадрата $= a^2$.

4) „ треугольника $= \frac{gh}{2} =$
$= \frac{abc}{4r} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
(a, b, c — стороны треуг.; r — радиус описанного круга; p — полупериметр).

5) Площадь равностороннего треугольника $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

6) Площадь трапеции $= \frac{h(a+b)}{2}$ (a и b суть длины параллельных сторон).

7) Площадь правильного n-угольника $= \frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$ (ϱ — радиус вписанного круга или апофема).

8) Длина окружности $= 2\pi r$ (где $\pi = 3{,}1416\ldots$).

9) Площадь круга $= \pi r^2$; длина дуги (a — центральный угол, опирающийся на данную дугу) $= \frac{a r \pi}{180}$.

10) Равносторонний треугольник (a — сторона; h — высота; r — радиус описанного круга; ϱ — радиус вписанного круга; S — площадь).

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3r}{2} = 3\varrho$$

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2\varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} = 3\varrho^2\sqrt{3}.$$

11 Квадрат.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$S = a^2 = 2r^2 = 4\varrho^2.$$

12) Правильный пятиугольник.

$$a=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\varrho\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$r=\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}=\varrho(\sqrt{5}-1)$$

$$\varrho=\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=5\varrho^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

13) Правильный шестиугольник.

$$r=a=\frac{2\varrho}{3}\sqrt{3}$$

$$\varrho=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$S=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}=\frac{3r^2}{2}\sqrt{3}=2\varrho^2\sqrt{3}.$$

14) Правильный восьмиугольник.

$$a=r\sqrt{2-\sqrt{2}}=2\varrho(\sqrt{2}-1)$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4+\ \sqrt{2}} = \varrho\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$S = 2a^2(\sqrt{2}+1) = 2r^2\sqrt{2} =$$
$$= 8\varrho^2(\sqrt{2}-1).$$

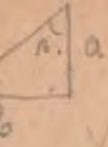
15) Прави ный десятиугольник.

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) =$$
$$= \frac{2\varrho}{5}\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$$

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) =$$
$$= \frac{\varrho}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{r}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

$$S = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{5r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} =$$
$$= 2\varrho^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}.$$



Тригонометрия.

Гониометрия.

Определение тригонометрических функций. Обозначив через a и b катеты прямоугольного треугольника, через c — гипотенузу, через α — угол, противолежащий катету a, — и через β — угол противолежащий катету b, — будем иметь:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}; \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

Знаки тригонометрических функций по четырем четвертям:

Четверти	sin	cos	tg	ctg
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
VI	—	+	—	—

Значения тригонометрических функций, соответствующие углам:

0°, 90°, 180°, 270°, 360°:

Функц.	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$+1$	0	-1	0
cos	$+1$	0	-1	0	$+1$
tg	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
ctg	$+\infty$	0	$\mp\infty$	0	$-\infty$

Некоторые частные важные значения тригонометрических функций:

Функции	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Формулы приведения:

	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$90^\circ-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
$90^\circ+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$180^\circ-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$180^\circ+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
$270^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\mathrm{cg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
$270^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$360^\circ-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

$$\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha)$$
$$\cos(45^\circ-\alpha)=\sin(45^\circ+\alpha)$$
$$\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)=\mathrm{ctg}(45^\circ+\alpha)$$
$$\mathrm{ctg}(45^\circ-\alpha)=\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha).$$

Важнейшие гониометрические формулы.

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4) $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

5) $\mathrm{cosec}\,\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$

6) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

7) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

8) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$

9) $\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}\right\}$

10) $\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \dfrac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}\right\}$

11) $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$

12) $\sin \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$

13) $\cos \alpha = \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$

14) $\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$.

15) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} =$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

16) $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} =$

$= \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$

17) $\sin(\alpha + \beta) =$
$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

18) $\cos(\alpha + \beta) =$
$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

19) $\sin(\alpha - \beta) =$
$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

20) $\cos(\alpha - \beta) =$
$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

21) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

22) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

23) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$

24) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$

25) $\left.\begin{array}{l} \sin(-\beta) = -\sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = -\sin(\beta - \alpha) \end{array}\right\}$

26) $\left.\begin{array}{l} \cos(-\beta) = \cos \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) \end{array}\right\}$

27) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\beta - \alpha) \end{array}\right\}$

28) $\operatorname{ctg}(-\beta) = -\operatorname{ctg}\beta$
$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = -\operatorname{ctg}(\beta-\alpha)$

29) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

30) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

31) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

32) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

33) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

34) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

35) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$

36) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

37) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

38) $$\left.\begin{aligned} 2\cos^2\alpha &= 1+\cos 2\alpha \\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= 1+\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

39) $$\left.\begin{aligned} 2\sin^2\alpha &= 1-\cos 2\alpha \\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2} &= 1-\cos\alpha \end{aligned}\right|$$

40) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

41) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

42) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

43) $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

44) $$\sin\alpha+\sin\beta = \\ = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

45) $$\sin\alpha-\sin\beta = \\ = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

46) $$\cos\alpha+\cos\beta = \\ = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

47) $$\cos\alpha-\cos\beta = \\ = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

48) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \alpha)$

49) $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + \alpha)$

50) $$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

51) $$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha\pm\beta}{2}$$

52) $$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\beta - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

53) $$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

54) $$\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

55) $$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$$

56) $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

57) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha.$

58) $$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

59) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma +$
$+ \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta -$
$- \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

60) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma -$
$- \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta -$
$- \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$

Формулы, относящиеся к решению треугольников.

a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — углы, противолежащие соответственно сторонам a, b и c; p — полупериметр; S — площадь; h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные соответственно на стороны a, b, и c; r — радиус описанного круга; ϱ — радиус вписанного круга.

$$
1) \left\{
\begin{aligned}
&\alpha+\beta+\gamma=180^\circ;\\
&\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ\\
&\sin(\beta+\gamma)=\sin(180^\circ-\alpha)=\\
&\qquad=\sin\alpha\\
&\cos(\beta+\gamma)=\cos(180^\circ-\alpha)=\\
&\qquad=-\cos\alpha\\
&\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\\
&\qquad=\cos\frac{\alpha}{2}\\
&\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\\
&\qquad=\sin\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

2) $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ (теорема синусов).

3) $$\begin{cases} h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta \\ h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma \\ h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha. \end{cases}$$

4) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r \\ a = 2r\sin\alpha \\ b = 2r\sin\beta \\ c = 2r\sin\gamma. \end{array}\right.$$

5) $$\left\{\begin{array}{l} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{array}\right\}$$ (теорема проекций).

6) $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$ (формула Непера).

7) $$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$
$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$ (формулы Мольвейде).

8) $$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma\end{aligned}\right\}$$ (обобщ. теорема Пифагора).

9) $$\begin{aligned} a+b+c&=2p\\ -a+b+c&=2(p-a)\\ a-b+c&=2(p-b)\\ a+b-c&=2(p-c).\end{aligned}$$

10) $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

11) $$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

12) $$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{\varrho}{p-a}\\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{\varrho}{p-b}\\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=\frac{\varrho}{p-c}.\end{aligned}\right.$$

13) $S=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}$

14) $S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}=$

$$=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$$

15) $S=2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{abc}{4r}$

16) $S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=$
$=\varrho\cdot p$

17) $S=\varrho^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

18) $\varrho=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$

$=(p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

19) $\varrho=4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

20) $p=4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Правильный многоугольник.

r — радиус круга; a — сторона вписанного многоугольника; a' — сторона описанного многоугольника; S — площадь вписанного многоугольника; S' — площадь описанного многоугольника.

Центральный угол $C = \frac{360^\circ}{n}$.

$$a = 2r \sin \frac{C}{2}; \quad a' = 2r \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$S = \frac{nr^2}{2} \sin C; \quad S' = nr^2 \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Прямоугольный сферический треугольник.

a и b — катеты; α и β — противолежащие им соответственно углы; c — гипотенуза.

1) $\cos c = \cos a \cos b$
2) $\sin a = \sin c \sin \alpha$
3) $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$
4) $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$
5) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha$
6) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha$

Остроугольный сферический треугольник.

a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им соответственно углы.

Теорема косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Теорема синусов:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$
$$h_a = \sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta$$
$$h_b = \sin a \sin \gamma = \sin c \sin \alpha$$
$$h_c = \sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha.$$

Формулы Гаусса:

1) $$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b + c}{2}$$

2) $$\cos \frac{a}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{b - c}{2}$$

3) $$\sin \frac{a}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{b + c}{2}$$

4) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=$

$$=\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b-c}{2}.$$

Стереометрия.

Обозначения: S — площадь основания; M — боковая поверхность; O — полная поверхность; V — объем.

1) Треугольная прямая призма.

a) В основании лежит равносторонний треугольник; a — его сторона; H — высота призмы.

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3};\quad M=3aH;$$

$$O=M+2S=\frac{a}{2}(6H+a\sqrt{3});$$

$$V=SH=\frac{a^2H}{4}\sqrt{3}.$$

b) Основание представляет из себя равнобедренный треугольник; c — длина его основания, b — длина одной из равных сторон; H — высота призмы.

$$S=\frac{c}{4}\sqrt{(2b+c)(2b-c)};$$

$$M=H(c+2b);$$

$$O=M+2S;$$

$$V=SH.$$

c) В основании лежит какой-нибудь треугольник вообще; a, b, c — стороны его; H — высота призмы.

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)} \times$$
$$\times \sqrt{(a+b-c)(b-a+c)},$$
$$M = H(a+b+c);$$
$$O = M + 2S;$$
$$V = SH.$$

2) Четыреугольная прямая призма.

a) В основании лежит квадрат; a — сторона его; H — высота призмы.

$$S = a^2;\ M = 4aH;$$
$$O = M + 2S = 2a(a + 2H);$$
$$V = SH = a^2H.$$

b) В основании лежит прямоугольник; a и b стороны его; H — высота призмы.

$$S = ab;\ M = 2H(a+b);$$
$$O = M + 2S = 2[ab + H(a+b)];$$
$$V = SH = abH.$$

c) Основанием призмы служит ромб a — сторона его, d — меньшая диагональ; H — высота призмы.

$$S = \frac{d}{2}\sqrt{(2a+d)(2a-d)};$$
$$M = 4aH;$$
$$V = SH;$$

d) В основании лежит параллелограмм; a и b его стороны, d — меньшая диагональ; H — высота призмы.

$$a + b + d = 2p;$$

$$S = 2\sqrt{p(p - a)(p - b(p - c)};$$

$$M = 2H(a - b);$$

$$O = M + 2S;$$

$$V = SH.$$

e) Основанием является равносторонняя трапеция; a и b — параллельные стороны трапеции; c — непараллельная сторона; h — высота трапеции; H — высота призмы.

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h;$$

$$M = (a + b + 2c)H;$$

$$O = M + 2S;$$

$$V = SH = \frac{a + b}{2} hH.$$

3) Куб. a — ребро куба.

$$S = a^2; \quad O = 6a^2; \quad V = a^3.$$

4) Прямой круговой цилиндр r — радиус основания; H — высота.

$$S = \pi r^2; \quad M = 2\pi rH;$$

$$O = 2\pi r(r + H); \quad V = \pi r^2 H.$$

5) Правильная треугольная пирамида a — сторона основания; b — ребро пирамиды; H — высота пирамиды.

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3};$$

$$M = \frac{3a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$H = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}};$$

$$O = S + M;$$

$$V = \frac{SH}{3} = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

6) Правильная четыреугольная пирамида. a — сторона основания (основанием является квадрат); b — ребро пирамиды; H — высота пирамиды.

$$S = a^2;\ M = 2\,ab;\ H = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}};$$

$$O = M + S = a\,(a + 2b);$$

$$V = \frac{SH}{3} = \frac{a^2}{3}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

7) Правильная пятиугольная пирамида. a — сторона основания; b — ребро пирамиды; H — высота пирамиды.

$$H = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})};$$

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})};$$

$$M = \frac{5a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$O = S + M; \quad V = \frac{SH}{3}.$$

8) Правильная шестиугольная пирамида. a — сторона основания; b — ребро пирамиды; H — высота пирамиды.

$$H = \sqrt{b^2 - a^2};$$

$$S = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}; \quad M = 3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}};$$

$$O = S + M;$$

$$V = \frac{SH}{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3(b^2 - a^2)}.$$

9) Прямой круговой конус. r — радиус основания; l — образующая конуса; H — высота конуса.

$$H = \sqrt{l^2 - r^2};$$
$$S = \pi r^2; \quad M = \pi r l;$$
$$O = \pi (l + r) r; \quad V = \frac{\pi r^2 H}{3}.$$

10) Усеченная пирамида (правильная). S — площадь нижнего основания; a — сторона нижнего основания; s — площадь верхнего основания; b — сторона верхнего основания; n — число сторон основания; H — высота усеченной пирамиды; d — апофема усеченной пирамиды.

$$M = \frac{a + b}{2} \cdot d \cdot n; \quad O = M + S + s;$$
$$V = \frac{H}{3} (S + s + \sqrt{Ss}).$$

11) Усеченный конус. r — радиус нижнего основания; ϱ — радиус верхнего основания; H — высота усеченного конуса; l — образующая.

$$H = \sqrt{l^2 - (r - \varrho)^2}; \quad M = \pi (r + \varrho) l;$$
$$V = \frac{\pi H}{3} (r^2 + \varrho^2 + r\varrho).$$

12) Шар. r — радиус шара.

$$O = 4\pi r^2; \; V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

13) Шаровой сегмент. r — радиус шара; H — высота сегмента; ϱ — радиус основания сегмента; K — поверхность сегмента без площади основания; O — полная поверхность.

$$K = 2\pi r H; \; V = \frac{H^2\pi}{3}(3r - H);$$

$$\varrho^2 = H(2r - H); \; O = K + \varrho^2\pi.$$

14) Шаровой пояс. r — радиус шара; a и b — радиусы нижнего и верхнего оснований пояса; H — высота пояса.

$$M = 2\pi r H; \quad O = M + (a^2 + b^2)\pi;$$

$$V = \frac{\pi H}{6}(3a^2 + 3b^2 + H^2).$$

15) Шаровой сектор. r — радиус шара; H — высота шарового сегмента, составляющего часть сектора.

$$V = \frac{2\pi r^2 H}{3}.$$

Правильные многогранники. r — радиус описанного шара; ϱ — радиус вписанного шара; a — ребро многогранника.

16) Правильный четырехгранник (тетраэдр):

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{6}\,;\ \varrho = \frac{a}{12}\sqrt{6}\,;$$

$$O = a^2\sqrt{3};\ V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

17) Правильный восьмигранник (октаэдр):

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,;\ \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{6}\,;$$

$$O = 2a^2\sqrt{3}\,;\ V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}\,.$$

18) Правильный двадцатигранник (икосаэдр):

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$$

$$\varrho = \frac{a(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}};$$

$$O = 5a^2\sqrt{3};\ V = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}).$$

19) Правильный двенадцатигранник (додекаэдр).

$$r = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15});$$

$$\varrho = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5})}{5}};$$

$$O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}};$$

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

Аналитическая геометрия на плоскости.

1) Уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с положительным направлением оси X угол α:

$$y = kx \quad (k = \operatorname{tg}\alpha).$$

2) Уравнение прямой, отсекающей на оси Y отрезок m и образующей с положительным направлением оси X угол α (уравнение прямой с угловым коэффициентом):

$$y = kx + m \quad (k = \operatorname{tg}\alpha).$$

3) Уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки a и b (отрезок a — на оси X и отрезок b — на оси Y) (уравнение прямой в отрезках):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

4) Уравнение прямой, проходящей на расстоянии p от начала координат (считая по перпендикуляру, опущенному из начала координат на прямую):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где α есть угол, который образует перпендикуляр p с положительным направлением оси X (нормальный вид уравнения прямой).

5) Общий вид уравнения прямой):

$$Ax + By + C = 0.$$

6) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

7) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P_1(x_1, y_1)$ по данному направлению k ($k = \operatorname{tg} \alpha$):

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

8) Угол между двумя прямыми, имеющими угловые коэффициенты k_1 и k_2:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

9) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $P_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярной к другой прямой, имеющей угловой коэффициент k:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1).$$

10) Уравнение окружности (a и b — координаты центра окружности; r — радиус окружности):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

11) Уравнение окружности в случае, если начало координат лежит в точке окружности и ось Y есть касательная к окружности в начале координат:

$$y = \pm \sqrt{2rx - x^2}.$$

12) Уравнение окружности отнесенное к центру (начало координат совпадает с центром окружности):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

13) Уравнение касательной к окружности в точке $P_1(x_1, y_1)$:

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

14) Уравнение нормали к окружности в точке $P_1(x_1, y_1)$:

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x.$$

15) Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

16) Уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

17) Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px - p^2.$$

18) Уравнение эллипса, отнесенное к вершине:

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

19) Уравнение гиперболы, отнесенное к вершине:

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

20) Уравнение параболы, отнесенное к вершине:

$$y^2 = 2px.$$

21) Уравнение эллипса, отнесенное к фокусу, в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

22) Уравнение гиперболы, отнесенное к фокусу, в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

где r и φ — суть полярные координаты, p — полупараметр и $e = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет; для эллипса $e < 1$ и для гиперболы $e > 1$.

23) Уравнение параболы, отнесенное к фокусу, в полярных координатах (полюс совпадает с фокусом):

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$

(для параболы $e = 1$).

24) Уравнение касательной в точке $P_1(x_1, y_1)$:

a) к эллипсу:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1;$$

b) к гиперболе:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1;$$

c) к параболе:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

25) Уравнение нормали в точке $P_1(x_1, y_1)$:

a) к эллипсу:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1);$$

b) к гиперболе:

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1);$$

c) к параболе:

$$v - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Дифференциальное и интегральное исчисления.

Производные элементарных функций.

1) $y = C$ (C — постоянное колич.),

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

2) $y = x^n$,

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}.$$

3) $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{na}{x^{n+1}} = -na\,x^{-n-1}.$$

4) $y = a\sqrt[n]{x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}$$

5) $y = a\sqrt[n]{x^m} = a\,x^{\frac{m}{n}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\,a\sqrt[n]{x^{m-n}} = \frac{m}{n}ax^{\frac{m}{n}-1}.$$

6) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

7) $y = e^x$,

$$\frac{dy}{dx} = e^x .$$

8) $y = a^x$,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a .$$

9) $y = \ln x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} .$$

10) $y = \lg_a x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \lg_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{M}{x},$$

где $M = 0{,}43429 \ldots$

11) $y = \sin x$,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

12) $y = \cos x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

13) $y = \operatorname{tg} x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

14) $y = \operatorname{ctg} x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

15) $y = \arcsin x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

16) $y = \arccos x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

17) $y = \operatorname{arc\,tg} x,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

18) $y = \operatorname{arc\,ctg} x,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таблица простейших интегралов.

1) $\int a\,dx = ax + c.$

2) $\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int e^x\,dx = e^x + c$

4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

8) $\int a\cos x\,dx = a \cdot \sin x + c$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c =$

$= -\arccos x + c_1$

12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + c =$

$= -\operatorname{arc\,ctg} x + c_1$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln c(x+\sqrt{1+x^2})$.

КОНЕЦ.

СОДЕРЖАНИЕ.

Справки

Жидаков. Сопротивление материалов (без высш. математ.) Госиздат. 40% скидки.

Сидоров. Детали машин.

Жуковский. Механика.

Математика

7/ Кале-Карл. Детали ма...
12 выпусков

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

открыло подписку на

„Хютте"—производственный.

при...

Справочник по технике производства, организации производственных предприятий и вопросам труда для инженеров, техников-производственников, красных директоров и студентов ВТУЗ'ов.

Под общей редакцией Московского еханико-Технического Института имени . В. Ломоносова при участии в редактирон. ѵ отделов проф. В. А. Александрова, оф. П. П. Боборыкова, проф. В. Р. Вильяса, проф. И. В. Грибова, проф. В. А. омова, проф. А. В. Панкина, инж. М. А. аверина, проф. А. И. Яшнова.

Справочник представляет перевод, переработанный и дополненный применительно к русским условиям с недавно вышедшего в Германии издания „Hütte — Taschenbuch für Betriebsingenieure", составленного Академическим Союзом „Hütte E. V." при участии О-ва немецких инженеров-производственников.

Справочник издается по типу лучших заграничных изданий этого рода и представляет собой энциклопедию по всем вопросам, связанным с техникой, организацией и управлением производственных предприятий всех отраслей.

Все издание составляет один том, подразделенный на следующие 3 выпуска:

1/ Графостатико
2/ Расчет ферм.

I выпуск: 1) Материалы и их испытание (отделы: Материаловедение. Испытание материалов. Сопротивление материалов).

2) Учение о механизмах.

3) Унификация промышленности Германии.

II выпуск: 1) Организация предприятий. (Фабрично-заводские установки. Перемещение и транспортирование грузов. Предупреждение несчастных случаев и промышленная гигиена. Организация производственных предприятий. Определение времени для обработки изделий).

2) **Организация труда в производстве.** (Постановления по вопросам труда. Испытание пригодности к труду. Профессиональное воспитание).

III выпуск: 1) **Обработка металлов горячая и давлением.** Разметка. (Литейное дело. Сварка. Паяние. Обработка металлических материалов, пользуясь их пластичностью. Закалка. Разметка).

2) **Инструменты и приспособления для работы.** (Измерения и мерительные инструменты. Пневматические инструменты. Приспособления для работы).

3) **Станки для металла и дерева.** (Машины орудия. Электрические станки. Машины и станки для обработки дерева).

Все издание составляет до 85 печатных листов текста с большим количеством чертежей, диаграмм и таблиц.

Справочник является необходимым пособием для всех квалифицированных технических работников на производствах, а также для всех технических индустральных высших и средних учебных заведений.

Кюне, Карл, инж. Технология авио-и автоматериалов. Перевод с нем. с дополн. проф. В. М. Лобач-Жученко. М. 1925 г. 132 стр. Ц. 85 к.

Межеричер, П. И. Геометрическое черчение. М. 1923 г. 83 стр. 112 рис. Ц. 80 к.

Михеев, П. В., инж. Универсальный прибор для перевода мер, деления и умножения чисел. М. 1925 г. Ц. 1 р. 50 к.

Орлов, П. М., проф. Метрическая система. Руководство для лекторов-пропагандистов метрической системы. М. 1925 г. 56 стр. 4 рис. Ц. 80 к. Одобрено Междуведомственной Метрической Комиссией.

О'Рурк. Таблицы умножения для быстрых вычислений. 7-е стереотипное изд. М. 1926 г. 496 стр. Ц. 2 р. в папке.

М. М. К. Таблицы для перевода русских мер в метрические и обратно. 6-е стереотипное изд. М. 1924 г. 64 стр. Ц. 30 к.

Настенные таблицы для перевода русских мер веса в метрические. Для торговли и промышленности. Ц. 15 к.

Настенные таблицы для перевода русских мер длины в метрические. Для торговли и промышленности. Ц. 15 к.

Рабчинский, И. В. Принципы Форда. М. 1925 г. Изд. 2-е. 24 стр. Ц. 15 к.

Ротмин. А. С. Что нужно знать мотористу, машинисту и десятнику торфо-элеваторной установки. М. 1925 г. 24 стр. Ц. 15 к.

Слудский, И. Ф. Как надо считать. Точные вычисления. Руководство для всех. М. 1925 г. 72 стр. Ц. 1 р. 10 к.

Таблицы для взаимного перевода цен русских и метрических мер. М. 1925 г. 64 стр. Ц. 40 к. Допущены Междуведомственной Метрической Комиссией.

Шиловский, И. А. Начертательная геометрия. Проекции ортогональные, с числовыми отметками, и аксонометрические. Пособие с практическим уклоном, примененное к современным педагогическим методам, для техникумов, технических военных и профессиональных школ. М. 1926 г. 104 стр. 103 рис. Ц. 85 к.