

22127-4
П58

Г. Н. ПОГОВ

**СБОРНИК
ИСТОРИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ
ПО**

**ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ**



О Н Т И · 1 9 3 8

Г. Н. ПОПОВ

СБОРНИК ИСТОРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Второе издание

ОНТИ
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЙ И ЮНОШЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

22.195

П58

01

8

В этой книге читатель найдет интересные исторические задачи по арифметике, алгебре и геометрии, созданные народным творчеством древних египтян, вавилонян, греков, римлян, китайцев, индусов, евреев, арабов, а также великими европейскими учеными старого и нового времени. Разбирая эти задачи и решая их с помощью составителя книги, читатель усвоит важнейшие вехи в историческом развитии математики с древнейших времен до наших дней.

Живой и наглядный характер задач, отражающих культурный уровень, экономический быт и идеологию создавших их народов, пробудит в юном читателе интерес к более глубокому изучению истории математики. Разъяснения, фактические справки, указания и библиография, подобранные составителем книги, дают для этого надежную руководящую нить. Школьные преподаватели и специалисты по математике также найдут в этой книге много ценного и свежего материала.

Абонемент

Редактор Н. А. Мецераков. Технический редактор О. Залышкина. Корректор В. Плесков. Заставки и концовки худ. Е. Хомзе. Обложка худ. Н. Тененбаума. Сдано в производство 29/VI 1937 г. Подписано к печати 13/I 1938 г. Уполномоч. Главлита № Б-28008. Тираж 20000. Формат бумаги 82×110₃₂. Уч.-авт. л. 10,85. Печ. л. 131¹/₂. Количество печ. знаков в 1 печ. л. 34 500. ОНТИ № 21. Заказ № 96. Индекс НП6—10—3. Цена 2 р. 40 к., переплет 60 к.

Набрано в 1-й Образцовой типографии ОГИЗа РСФСР треста «Полиграфкнига», Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в 4-й типографии ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник», Ленинград, Международный пр., 75а.

ЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ

СЛЕНДОВАТЕЛЬСТВО

ОБЩЕСТВЕННАЯ

ГОД. СМЕРЬ

120684-1

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие к первому изданию	3
---	---

Задачи

Вавилон	5
Египет	8
Греция	11
Рим	18
Китай	20
Индусы	22
Евреи	27
Арабы	30
Западная Европа	
VIII—XV века	36
XVI век	42
XVII век	47
XVIII век	51
XIX век	56

Ответы и решения с историческими указаниями

Вавилон	66
Египет	67
Греция	70
Рим	89
Китай	93
Индусы	95
Евреи	105
Арабы	108
Западная Европа	
VIII—XV века	121
XVI век	136
XVII век	152
XVIII век	165
XIX век	184
Указатель имен и названий	217

Обозначение Великих букв 127

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагая вниманию преподавателей, учащихся и всех любителей математики свой труд, я считаю необходимым предпослать пользованию им несколько слов, поясняющих его цель и назначение. Это не систематический задачник, где для практики в каждый отдел обычно включают значительное количество однотипных задач. Это и не сборник математических развлечений. Самое заглавие вскрывает до некоторой степени идею этого по существу нового задачника, основная цель которого — познакомиться с „эволюцией“ задачи как таковой.

Ограничиваясь областью арифметики, алгебры и геометрии, я стремился сделать материал доступным всем, кто знаком с элементарной математикой, даже не в полном объеме школ II ступени.

Что касается решений, то они даны в подробностях для наиболее замысловатых задач, при чем нередко указывается не только обычное, современное решение, но и то, которое было предложено самим автором, иногда сложное, а чаще всего оригинальное и остроумное. Считаю эти указания полезными в смысле ознакомления с историческим ходом развития приемов и методов, практиковавшихся различными народами в разные эпохи. Помимо этого, смотря по важности затронутых вопросов, я везде давал исторические справки о происхождении методов и сведения о деятельности того или иного математика.

Вкрапливание в преподавание такого рода сведений, полагаю, должно повышать интерес к изучению математики и способствовать закреплению пройденного.

Большинство задач впервые появляется в нашей популярной литературе. Многие заимствовано из первоисточников или из специальных монографий, рассеянных по периодическим изданиям.

Г. Н. Попов



Вавилон

ТАБЛИЦА ГИЛЬПРЕХТА

1. На этой клинописной таблице помещены делители и частные числа, которое по шестидесятиричной системе, бывшей в ходу у вавилонян, записано так:

$$60^8 + 10 \cdot 60^7.$$

Выразить это число по десятичной системе.

1-я таблица Сенкере

2. На этой таблице помещены квадраты чисел от 1 до 60, выраженные по шестидесятиричной системе.

Вот пример записи:

1.21	есть квадрат	9
2.1	"	11
2.49	"	13
3.45	"	15
4.16	"	16
...	...	...
25.21	"	39
...	...	...
56.4	"	58
...	...	...

Проверить справедливость этой записи.

3-я таблица Сеннеро

3. На этой таблице помещены кубы чисел от 1 до 32, выраженные по шестидесятиричной системе. Вот пример записи:

2.5	есть	куб	5
3.36	"	"	6
5.43	"	"	7
8.32	"	"	8
1.8.16	"	"	16
9.6.8	"	"	32

Проверить справедливость этой записи.

Таблица Гинкса.

4. На этой таблице имеется ряд чисел, записанных по шестидесятиричной системе: 1.36; 1.52; 2.8; 2.24; 2.40; 2.56; 3.12; 3.28; 3.44; 4.

Показать, что эти числа представляют арифметическую прогрессию, и записать ее по десятичной системе.

5. Показать, что среднее арифметическое двух чисел и среднее гармоническое их составляют с самими числами геометрическую пропорцию.

Примечание. Средним гармоническим двух чисел называется отношение среднегеометрического к среднеарифметическому двух чисел.

6. Земельная мера у вавилонян называлась ган и равнялась 1800 шарам.

Выразить в шарах

$$1) \frac{1}{3} \text{ гана} + \frac{2}{18} \text{ гана}; \quad 2) \frac{1}{3} \text{ гана} + \frac{3}{18} \text{ гана};$$

$$3) 1 \text{ ган} - \frac{1}{36} \text{ гана};$$

В разности 20 ган — $(1 \text{ ган} + \frac{1}{3} \text{ гана})$ целую часть вы-

разить в ганах, дробную — в шарах.

7. Разделить прямой угол на три равные части.

8. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π , которым пользовались вавилоняне.

9. Для определения площади четырехугольника вавилоняне брали произведение полусумм противоположных сторон. Выяснить, для какого типа четырехугольников эта формула точно определяет площадь.





Египет

Задачи из Московского папируса

Из коллекции Голенищева

10. Определить объем квадратной усеченной пирамиды, если ее высота равна 6, сторона нижнего основания 4, верхнего 2.

11. Определить длину сторон прямоугольника, если известно их отношение и площадь фигуры.

Задачи из Кахунского папируса

12. Отношение чисел, равно $2:1\frac{1}{2}$, сумма квадратов 400.

Найти эти числа.

13. Разложить объем в 120 куб. локтей на 10 частей высотой каждая в 1 локоть с прямоугольным основанием, стороны которого относились бы, как $1:\frac{3}{4}$.

Задачи из Берлинского папируса

14. Если тебе будет сказано: разделить 100 квадратных локтей на 2 неизвестные части и $\frac{3}{4}$ стороны одной взять за сторону другой, дай мне каждую из неизвестных частей (т. е. разбить площадь в 100 кв. локтей на 2 квадрата, стороны которых относились бы как $1:\frac{3}{4}$).

Задачи из папируса Райнда

15. В первых восьми таблицах этого папируса приводятся примеры деления числа 2 на нечетные числа от 3 до 99, при чем получаемые дроби представлены в виде сумм так называемых „кантьем“, т. е. дробей с числителем, равным единице, напр.:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}; \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \text{ и т. д.}$$

Показать, что дробь вида $\frac{2}{2n+1}$ всегда можно представить в виде суммы двух кантьем.

$$16. x + \frac{x}{7} = 19; x + \frac{x}{2} = 16; x + \frac{x}{4} = 15; x + \frac{x}{5} = 21.$$

17. Две трети в прибавлении (к неизвестному), $\frac{1}{3}$ в отнятии, 10 остается (т. е. к неизвестному прибавлено две трети его и от полученной суммы отнята ее треть. Остаток равен 10).

$$18. 3x + \frac{1}{3}x = 1; 3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 1.$$

19. 100 хлебов — на 10 лиц, 50 — на 6, 50 — на 4. Какова разность (т. е. 50 хлебов разделить поровну между 6-ю, а 50 между 4-мя и найти разность между полученными частными)?

20. Египтяне, заменяя площадь круга площадью равновеликого квадрата, брали за сторону последнего $\frac{8}{9}$ диаметра круга.

Найти отсюда приближенное значение для π .

21. Для вычисления площади равнобедренного треугольника египтяне брали половину произведения основания на боковую сторону. Вычислить в процентах, как велика ошибка на примере:

Основание 4, боковая сторона 10.

22. При вычислении площади равнобокой трапеции египтяне брали произведение полусуммы оснований на боковую сторону. Вычислить в процентах погрешность на примере:

Нижнее основание 6, верхнее 4, боковая сторона 20.

23. В одной из задач для первого члена убывающей арифметической прогрессии дается выражение, представляющееся в современной символике следующей формулой:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1) \frac{d}{2},$$

где a — первый член, S — сумма членов, n — число членов, d — разность. Показать, что формула эта совершенно правильна.

24. Смотри, теперь приходит пастух с 70 быками. Сказано счетчиком скота этому пастуху рогатого скота: „Сколько скота приводишь ты из своего многочисленного стада?“ Ему сказано пастухом: „Я привожу тебе две трети от трети скота; определи его мне, сочти его мне, я хочу найти, я хочу сосчитать“.

25. „У семи лиц по семи кошек; каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна. Как велики числа этого ряда и как велика их сумма?“ (Задача реконструирована по Родэ.)

Задачи из Акмимского папируса

26. Некто засеял 7 артабов, другой 8, третий 9 и с них взято налога $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (т. е. $3\frac{3}{4}$). Сколько составит седьмая, восьмая, девятая (т. е. доля семи, доля восьми, доля девяти, иначе говоря: как велик налог, взятый с каждого)?

27. Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Из того, что осталось, другой взял $\frac{1}{17}$, оставил же он в сокровищнице 150. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально?

28. В Акмимском папирусе площадь круга, окружность которого есть среднее арифметическое двух данных окружностей, принимается за среднее арифметическое их площадей. Показать, что это неправильно, и найти, как велика ошибка в процентах, при чем радиусы данных кругов $r=5$; $R=10$.





Греция

Задачи, приписываемые Пифагору

29. Сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

30. Всякое нечетное число кроме единицы есть разность двух квадратов.

31. Правило Пифагора для вычисления сторон прямоугольного треугольника основано на тождестве:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$$

Вычислить, пользуясь этим тождеством, стороны прямоугольных треугольников для $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Так называемое „правило Платона“

32. Если принять за один из катетов четное число $2p$, то другой катет будет $p^2 - 1$, а гипотенуза $p^2 + 1$. Проверить и вычислить стороны треугольников для $p = 2, 3, 4, 5$.

Задачи Евклида

Из трактата „Начала“

33. На данной конечной прямой AB построить равносторонний треугольник.

34. Разделить прямолинейный угол на две равные части.

35. Построить параллелограм, стороны которого наклонены под данным углом, так, чтобы он был равновелик данному треугольнику.

36. В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику.

87. К двум прямым найти третью пропорциональную.
 38. К трем прямым найти четвертую пропорциональную.
 39. К двум прямым найти среднюю пропорциональную.
 40. Разделить прямую AB в точке H на такие две части, чтобы большая была средней пропорциональной между всей прямой и ее меньшей частью.
 41. В данный круг вписать правильный пятиугольник.
 42. В данный круг вписать правильный пятинадцатиугольник.
 43. Вписать в больший из двух данных концентрических кругов правильный многоугольник с четным числом сторон, который не касался бы меньшего круга.
 44. Квадрат, построенный на стороне вписанного пятиугольника, равен сумме квадратов сторон, вписанных в тот же круг правильных шестиугольника и десятиугольника.
 Из арабской рукописи трактата Евклида „О делении фигур“.
 45. Разделить пополам площадь, ограниченную дугой окружности и двумя пересекающимися прямыми.

Задачи Архимеда

Из трактата „О квадратуре параболы“

46. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

Из трактата „О шаре и цилиндре“

47. Поверхность шарового сегмента равна площади круга, имеющего радиусом прямую, которая проведена от вершины сегмента к окружности, служащей ему основанием.

48. Цилиндр, имеющий основанием большой круг шара, а высотой — диаметр этого шара, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема, и поверхность, равную $\frac{3}{2}$ поверхности шара.

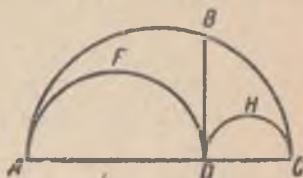
Из трактата „Леммы“

49. Если две окружности касаются в точке E и диаметры AB и CD параллельны, то точки A , E и D лежат на одной прямой.

50. Пусть ABC полукруг. Из точки B опущен на диаметр AC перпендикуляр BD и на отрезках AD и DC как на диаметрах описаны два полукруга AFD и DHC . Площадь $AFDHCB$ полученной секирки (арбелон) равна площади круга диаметра DB .

51. Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.

52. Пусть AB диаметр круга и CD хорда, к нему не перпендикулярная. Если из концов диаметра опустить на хорду перпендикуляры AE и BF , то отрезки CF и DE равны.



Черт. 1.

53. Если в круге хорды AB и CD пересекаются в точке E под прямым углом, то сумма квадратов отрезков AE , BE , CE , DE равна квадрату диаметра.

54. Если к окружности из внешней точки провести одну секущую через центр, а другую так, чтобы внешний отрезок равнялся радиусу окружности, то угол между секущими будет измеряться одной третью большей из дуг, заключающихся между его сторонами.

Из трактата „О шаре и цилиндре“

55. Найти шар, имеющий объем, равный объему данного конуса или цилиндра.

56. Отрезать от шара плоскостью такой сегмент, чтобы отношение его объема к объему конуса, имеющего основание и высоту сегмента, было данное.

Из трактата „О спиралях“

57. Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда.

Задача Герона

Из трактата „Диоптра“

58. Определить площадь треугольника, если даны три его стороны:

1) $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$; 2) $a = 5$; $b = 12$; $c = 13$.

Задача Гипсикла

59. Доказать, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов второй половины превышает сумму членов первой на число, кратное квадрату половины числа членов.

Задачи Дамасция

Из дополнений к „Началам“ Евклида, книга XV.

- 60. В данный куб вписать тетраэдр.
- 61. В данный тетраэдр вписать октаэдр.
- 62. В данный куб вписать октаэдр.

Задача Никомаха

63. Показать, что если разбить ряд всех нечетных чисел на группы так, что число членов в каждой будет возрастать как ряд натуральных чисел, то сумма членов каждой группы будет равна кубу числа членов.

Задачи Диофанта Александрийского

Из трактата „Арифметика“

64. Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы большая часть от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы большая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

65. Найти два числа, сумма которых 20, а произведение 96.

66.
$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$$

67. Найти три числа так, чтобы наибольшее превышало среднее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наименьшего, чтобы среднее превышало меньшее на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ наибольшего и чтобы наименьшее превосходило число 10 на данную часть $\left(\frac{1}{3}\right)$ среднего числа.

68. Найти два числа, отношение которых 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5.

69. Найти 3 числа, если дано, что произведение суммы первых двух на третье есть 35, суммы первого с третьим на второе 27, а суммы второго с третьим на первое 32.

70. Найти три числа так, чтобы произведение любой пары их, увеличенное их суммой, равнялось бы соответственно 8, 15, 24.

71. Некто купил вина двух сортов, из коих мера первого стоит 5 драхм, а второго 8. За все вино он заплатил известное число драхм, которое есть число квадратное. Число это, будучи прибавлено к 60, также дает квадрат. Корень квадратный из этого последнего числа равен числу купленных мер вина. Требуется узнать, сколько заплачено за каждый сорт вина.

72. Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.

73. Найти три числа так, чтобы суммы всех трех и каждой двух были квадратами.

74. Катет прямоугольного треугольника есть точный куб, другой катет представляет разность между этим кубом и его стороной (т. е. первой степенью), а гипотенуза есть сумма куба и его стороны. Найти стороны.

Задачи Ямвлиха

75. Решить систему:

$$\begin{aligned}x + y &= 2(z + u), \\x + z &= 3(y + u), \\x + u &= 4(y + z).\end{aligned}$$

76. Решить систему:

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{3}{2} (z + u), \\x + z &= \frac{4}{3} (y + u), \\x + u &= \frac{5}{4} (y + z).\end{aligned}$$

Задачи Метродора

Надгробная надпись на могиле (эпитафия) Диофанта

77. Диофант провел шестую часть своей жизни в детстве, двенадцатую в юности; после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и еще 5 лет у него родился сын, умерший

по достижении половины числа лет жизни отца, после чего Диофант прожил только 4 года. Скольких лет Диофант умер?

78. Корона весит 60 мин и состоит из сплава золота, меди, олова и железа. Золото и медь составляют вместе $\frac{2}{3}$, золото и олово $\frac{3}{4}$, золото и железо $\frac{3}{5}$ общего веса. Определить вес каждого металла в отдельности.

Эпиграммы

Задачи в стихах из „Anthologia Graeca“

79. — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

80. Найти три числа, из которых первое, прибавленное к третьей части третьего, равно второму, а второе, прибавленное к третьей части первого, равно третьему. Третье же больше первого на 10.

81. Бассейн получает воду из 4 труб. Первая наполняет его в день, вторая — в два дня, третья — в три, а четвертая — в четыре. Требуется узнать, во сколько времени наполнится бассейн, если все четыре трубы открыть одновременно.

82. Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили 9 муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько было плодов у каждой из граций до встречи с музами?

83. Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. „Чего ты жалуешься, — сказал мул, — если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я тебе дам один свой мешок, наши грузы только сравняются“. Сколько было у каждого?

84. — Хроноса вестник, скажи, какая часть дня миновала?

— Дважды две трети того, что прошло, остается.

Примечание. У древних день делился на 12 часов.

85. Вот Полифема циклопа из меди статуя отлита.

Руку, уста и единое око ваятель сделал на диво,

Скрывши в них трубы: водой великан истекает как будто.

И в настоящее время влагу уста изливают.

Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку способна
Весь водоем до краев через три дня переполнить.
Оку — достаточно дня, а устам и всего лишь две пятых,
Вместе все три водоем скоро ли могут наполнить?

86. Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:

„Что так тебя огорчило, ответствуй немедленно!“

„Яблок я нес с Геликона немало, — Эрот отвечает, —
Музы, отколь ни возмись, напали на сладкую ношу.
Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.

С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла
Терпсихора,

С частью седьмою Эрато стремглав от меня убежала.
Тридцать плодов утатила Полимния. Сотня и двадцать
Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.

Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.
Только полсотни плодов мне оставили музы на долю“.

Задачи Паппа Александрийского

Из трактата „Математический сборник“

87. Показать, что во всяком треугольнике параллелограм, построенный на одной стороне треугольника внутри его и имеющий две другие вершины вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограмов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма.

88. Показать, что в кругах площади подобных сегментов относятся, как квадраты хорд, служащих им основаниями.

89. Дана точка D на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы отрезок ее внутри угла имел данную длину.



120684-1





Рим

Задачи Эпафродита

Из отрывка в Арцерианском кодексе

90. Найти число всех деревьев, посаженных в пятифутовом расстоянии друг от друга на прямоугольном участке земли, стороны которого 120 фут. и 70 фут.

91. Суммировать кубы чисел натурального ряда.

Примечание. Основываться на задаче Никомаха (см. № 63). Из отрывка, приписываемого Эпафродиту и Витрувию Руфу.

92. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 9, 12, 15. Найти диаметр круга, вписанного в этот треугольник.

Задачи Марка Юния Нипсуса

Из Эрфуртского кодекса

93. Нипсус дал правило для определения вместимости бочек по формуле: $\frac{11}{14} \left(\frac{D_0 + D_1 + D_2}{3} \right)^2 \cdot H$, где H — высота бочки, а D_0 , D_1 , D_2 — диаметры, измеренные в нижней, средней и верхней ее части.

Показать, каким значением π пользовались римляне, принимая объем бочки за объем цилиндра той же высоты, с диаметром, равным среднему арифметическому из диаметров указанных трех сечений.

Из Арцерианского кодекса

94. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 25 фут., а площадь 150 фут. Определить катеты.

95. Стороны треугольника 6, 8, 10. Найти его площадь (по формуле Герона).

Задача Юния Модерата Колумеллы

Из трактата „О сельском хозяйстве“

96. Если сторона правильного треугольника a , то Колумелла дает для его площади формулу $\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{10} a^2$. Верна ли эта формула и как велика погрешность (в процентах) при определении площади треугольника по этой формуле?

Задача из Шартрской рукописи

97. Определить высоту треугольника, основание которого 15, а боковые стороны 14 и 13.





Китай

Из трактата „Девять отделов искусства счета“

98. В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

99. Несколько купцов хотят сообща купить товар. Если каждый даст на покупку 8 кашов, то окажется 3 каша лишних. Если же каждый даст по 7 кашов, нехватит четырех кашов. Сколько купцов и какова стоимость товара?

100. 5 волов и 2 барана стоят 10 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

101. Из трех бочек риса одинаковой емкости похищено тремя ворами некоторое количество риса. Общее количество его было неизвестно, но выяснилось, что в первой бочке остался 1 го риса, во второй — 1 шинг 4 го и в третьей — 1 го. Пойманные вору показали: 1-й, что он отсыпал рис из 1-й бочки с помощью лопаты, второй — что он пользовался деревянным башмаком, а третий — миской, при чем они соответственно брали из 2-й и 3-й бочек. Лопата, башмак и миска найдены на месте преступления. При обмере их оказалось, что емкость лопаты 1 шинг 9 го, башмака — 1 шинг 7 го, миски — 1 шинг 2 го.

Требуется узнать, сколько похитил каждый вор. При этом известно, что $10 \text{ го} = 1 \text{ шингу}$; $10 \text{ шингов} = 1 \text{ тау}$; $10 \text{ тау} = 1 \text{ ши}$.

Из трактата „Начала искусства вычисления“

102. Найти число, которое при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 7 снова 2.

103. В середине квадратного озера со стороны 10 футов растет тростник, выходящий из воды на 1 фут. Если нагнуть тростник, вершина достигает берега. Как глубоко озеро?

Из трактата „Девять отделов искусства счета“

104. Бамбуковая трость в 10 футов вышины надломана. Если пригнуть верхнюю часть к земле, то вершина трости будет отстоять от корня на 3 фута. Какой длины надломленная часть?

Три задачи из трактата „Начала искусства вычисления“

105. Определить стороны прямоугольного треугольника, если известны площадь и периметр.

106. Даны периметр и площадь прямоугольника. Найти стороны.

107. Вписать круг в прямоугольный треугольник.

Из трактата „Чеу-пей“ и комментария Конфуция к классической книге „И-кинг“

108. Доказать, что удвоенная сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника без квадрата их разности равна квадрату их суммы.

Задача Суань Шу

109. Имеются два сорта чая. 3 фунта первого смешаны с 6 фунтами второго, после чего оказалось, что фунт смеси стоит 3 дяо (30 коп.). После этого еще смешали 12 фунтов первого сорта с 4 фунтами второго, при чем оказалось, что фунт смеси стоит $3\frac{1}{2}$ дяо. Сколько стоит фунт первого и второго сорта?

Задача Дай Шу

110. Упростить: $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) \cdot \frac{ab}{a^2 - (b+c)^2}$.

Примечание. Обе задачи предложены в 1908 г. на выпускном экзамене филологического факультета (И-сио-гуань) Бейпинского университета.





Индусы

Задачи из „Бахшалийской“ рукописной арифметики

111. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?

112. Путник в первый день проходит две единицы пути, а в каждый следующий день тремя единицами более. Второй путник проходит в первый день три единицы пути, а в каждый следующий — двумя единицами более. Когда первый догонит второго?

113. Найти число, которое от прибавления 5 или отнятия 11 обращается в полный квадрат.

Задачи Апастамбы

Из сборника „Сулва-сутра“

114. Построить квадрат, равновеликий сумме двух данных квадратов.

115. Построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов.

Примеры Бодгайаны

Из сборника „Сулва-сутра“

116. Бодгайана строит прямые углы, на сторонах которых отложены соответственно отрезки: (3, 4), (12, 5), (15, 8), (7, 24), (12, 35), (15, 36). Если соединить концы отрезков каждой пары, получим ряд прямоугольных треугольников. Вычислить их гипотенузы.

Правило Катнайаны

Из сборника „Сулва-сутра“

117. Катнайана говорит, что надо разделить диаметр круга на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного (приблизительно) кругу. Определить приближение для π , получающееся в этом случае, и оценить в процентах ошибку (ограничиваясь 3 десятичными знаками π).

Задачи Ариабхатты

Из трактата „Ариабхаттиям“

118. (Правило XXX). Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

119. (Правило XXXI). Два светила, находящиеся на данном расстоянии (d) друг от друга, движутся одно другому навстречу с данными скоростями (v и v_1). Определить точку их встречи.

120. (Правило XX). В этом правиле Ариабхатта словесно дает выражение для числа членов арифметической прогрессии, которое определяется формулой:

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{-2a + \sqrt{(r - 2a)^2 + 8Sr}}{r} \right],$$

где n — число членов, a — первый член, r — разность прогрессии и S — сумма всех членов. Проверить справедливость этой формулы.

121. (Правило XXI). Определить число ядер треугольной кучи.

Задача Парамадисвары

Из комментариев к трактату „Ариабхаттиям“

122. Найти число, которое, будучи умножено на 3, а затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего из него извлечен квадратный корень, отнята единица и результат возведен в квадрат, даст 4.

Задача Сридхары

Из трактата „Сущность вычисления“

123. Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть на цветах силиндха. Утроенная разность последних двух чисел направилась к цветам кутая. И осталась еще одна

пчелка, летающая взад и вперед, привлеченная чудесным ароматом жасмина и пандануса. Скажи мне, очаровательная, сколько всех пчел?

Задачи Брамагупты

Из трактата „Усовершенствованное учение Брамь“

124. Два аскета живут на выступе крутой горы, на высоте h на расстоянии от соседнего селения в t раз большем. Один аскет, чтобы достичь селения, спускается с горы, потом идет прямой дорогой. Другой в это время поднимается на некоторую высоту x и оттуда уже направляется к селению. Если оба они при этом делают один и тот же путь, спрашивается: на какую высоту поднялся второй аскет?

125. Зная высоту свечи, высоту гномона (вертикального шеста) и расстояние между их основаниями, найти длину тени, бросаемой гномоном.

126. Найти высоту свечи, зная длины теней, бросаемых гномоном в двух различных положениях, при условии, что дано расстояние между гномонами.

127. Показать, что произведение двух сторон треугольника, деленное на длину перпендикуляра, опущенного на третью сторону из противоположной вершины, равно диаметру описанного круга.

128. В четырехугольнике, диагонали которого взаимно перпендикулярны, корень квадратный из суммы квадратов двух противоположных сторон равен диаметру круга, описанного около этого четырехугольника.

Примечание. Воспользоваться задачей № 53.

129. Квадрат хорды, перпендикулярной к диаметру, деленный на учетверенный любой отрезок диаметра и сложенный с тем же отрезком, равняется диаметру.

130. Меньший из отрезков диаметра, пересеченного перпендикулярной хордой, равен полуразности диаметра и корня квадратного из разности квадратов диаметра и хорды.

Задачи Бхаскара Акариа

Из трактата „Венец астрономического учения“

131. Если некоторое число умножить на 5, от произведения отнять его треть, остаток разделить на 10 и прибавить к этому последовательно $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ первоначального числа, то получится 68. Как велико число?

132. Преобразование корней.

Показать, что:

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

133. Из пучка цветов лотоса взяты одна третья, пятая и шестая части, соответственно принесенные в жертву богам: Шиве, Вишну и Солнцу. Одна четверть досталась Бавани. Оставшиеся 6 лотосов даны глубокопочтимоу учителю. Сосчитай мне быстро число всех цветов.

134. Некто сказал своему другу: „Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя“, на что последний ответил: „Если ты мне дашь только 10 рупий, я стану вшестеро богаче тебя“. Спрашивается: сколько было у каждого?

135. Стая обезьян забавлялась; квадрат одной восьмой части их резвился в лесу, остальные двенадцать кричали на вершине холмика. Скажи мне: сколько было всех обезьян?

136. Корень квадратный из половины пчелиного роя полетел к кусту жасмина. Восемь девятых роя остались дома. Одна пчелка полетела за трутнем, обеспокоенная его жужжанием в цветке лотоса, куда он попал вечером, привлеченный приятным ароматом, и не может оттуда выбраться, так как цветок закрылся. Скажи мне число пчел роя.

137. Найти число, обладающее тем свойством, что оно, будучи умножено на 12, по прибавлении к своему кубу равняется ушестеренному квадрату самого себя, увеличенному тридцатью пятью (решается элементарно).

138. Решить уравнение: $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ (решается элементарно).

139. Найти прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза выражалась бы тем же числом, что и площадь.

140. Бхаскара говорит, что если диаметр круга 2000, то сторона правильного вписанного в круг треугольника будет $1732\frac{1}{20}$, квадрата $1414\frac{13}{60}$, шестиугольника 1000 и восьмиугольника

$765\frac{11}{30}$. Проверить справедливость этого утверждения.

141. Если D — диаметр шара, то $\frac{D^3}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{D^3}{2}$ есть мера объема шара. Определить, при каком значении π справедливо это предложение.

142. Найти высоту кругового сегмента, если известны диаметр круга и основание сегмента.

143. 30 балок в 12 пальцев толщины, 16 ширины и 14 локтей длины стоят 100 нишка (монета). Что стоят 14 балок в 8 пальцев толщины, 12 ширины и 10 локтей длины?

144. Решить в рациональных числах уравнение:

$$ax + by + c = xy.$$

Современная индусская задача

145. Трое друзей имели обезьяну. Они купили некоторое количество плодов мангового дерева и спрятали их. Ночью один из друзей захотел полакомиться, пошел в кладовую и отделил себе третью часть, но при этом оказалось, что один плод лишний, и он отдал его обезьяне, а свою часть съел. Спустя несколько времени пришел второй и не подозревая, что первый свою часть уже взял, разделил остаток на три равные доли, при чем опять оказался один плод лишний, и он дал его обезьяне и сам съел свою часть. Наконец, пришел третий и также поделил остаток на три равные доли, при чем опять один лишний плод отдал обезьяне, а сам съел свою часть.

На другой день утром все трое пришли в кладовую и поделили между собой оставшиеся плоды поровну, при чем опять один лишний плод отдали обезьяне.

Определить наименьшее количество плодов, которое удовлетворяет указанным выше условиям распределения.





Евреи

Владча из трактата „Бава-Батра“

Талмуд

146. Пять дворов расположены один за другим, соединены проходами, но выход в переулок общий. Расходы по содержанию дворов распределены так, что живущие на заднем дворе принимают участие в расходе по всем 5 дворам, живущие в следующем — по 4 дворам и т. д. Наконец, живущие в переднем дворе принимают участие в расходе только по этому последнему. Какая часть расходов падает на каждый двор?

Задача из трактата „Охалот“

Талмуд

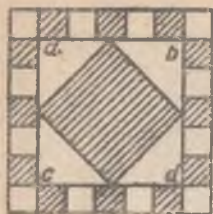
147. В этом трактате сказано, что периметр квадрата, описанного около круга, на четверть его больше окружности этого круга. Определить приближение для π , которым в данном случае пользовались евреи.

Задача из трактата „Менахот“

Талмуд

148. Определить сумму шестидесяти первых чисел натурального ряда.

Задача Маймонида



Черт. 2.

149. На участке площадью 64 кв. ладони (8·8) вспаханы 13 гряд (на чертеже заштрихованы): по три гряды в 1 кв. ладонь в каждой наружной полосе, а 13-я в виде квадрата, полученного от соединения середин сторон квадрата $abcd$. Определить, какая часть занята под посев.

Задача Ибн-Эзры

Из трактата „Книга о числе“

150. Если диаметр круга единица, то длина нити, охватывающей окружность, выражается целым с дробью: $3 + \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{8}{60^4}$. Определить, до какого десятичного знака точно это приближение для π .

Задачи Савасорда

Из „Liber embadorum“

151. Решить уравнение $x^2 + 4x = 77$.

152. Системы квадратных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 48 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2. \end{cases}$$

153. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6. \end{cases}$

154. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x - y = b. \end{cases}$

155. $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 - y^2 = b^2. \end{cases}$

Задачи Абен-Дреата

156. Какое число, будучи придано к девяти, дает свой ушестеренный корень?

157. Какое число, будучи сложено со своим удесятеренным корнем, дает 39?

158. Какое число равно своему утроенному корню, сложенному с четырьмя?

Задача Леви бен-Герсон

159. $\frac{x+y}{z-x} = 4\frac{1}{2}$; $\frac{y+z}{y-x} = 5$; $x = 10\frac{3}{4}$.





Арабы

Задачи из Алгебры Магомет ибн-Муса Альхваризми

160. Решить квадратные уравнения:

- 1) $5x^2 = 40x$. 3) $10x = x^2 + 21$. 5) $x^2 + 20 \frac{1}{4} = 11 \frac{1}{4} x$.
 2) $\frac{25}{9} x^2 = 100$. 4) $x^2 = 12x + 288$. 6) $\frac{1}{12} x^2 + \frac{7}{12} x = 19$.

161. В равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 и основанием 12 вписать квадрат.

162. Определить отрезки, на которые делит основание AC перпендикуляр, опущенный из противоположной вершины B треугольника ABC , если даны его стороны: $AB = 15$; $BC = 13$; $AC = 14$.

163. Найти объем усеченной квадратной пирамиды, высота которой 10, а стороны верхнего и нижнего оснований соответственно 2 и 4.

Задачи Ал-Кархи

Из трактатов „Кафи-фил-Гисаб“ и „Ал-Факри“

164. Перемножить: $(3x^2 + 2x + 4) \cdot (2x^2 + 3x + 5)$.

165. Правило Ал-Кархи для извлечения квадратного корня по приближению. Если a^2 — наибольший квадрат, содержащийся в данном числе N , а r — избыток, то

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}, \text{ если } r < 2a + 1.$$

Объяснить, каким путем Ал-Кархи мог вывести это правило. Оценить погрешность, вычислив $\sqrt{415}$ обычным способом с точностью до 0,001.

166. 1) $\sqrt{a^2 + 4a + 4}$. 2) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1}$.

167. Сложить: $\sqrt{2} + \sqrt{18}$, пользуясь тождеством:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}.$$

168. Найти число, которое от умножения на $8 + \sqrt{5}$ дает единицу.

169. $x^2 + 10x = 39$.

170. 1) $x^4 + 5x^2 = 126$. 2) $x^4 + 24 = 10x^2$. 3) $x^4 = 2x^2 + 8$.

4) $x^6 = 3x^3 + 40$. 5) $x^7 = bx^5 + cx^3$.

171. Решить систему:

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

$$xz = y^2;$$

$$xy = 10.$$

172. Найти последний член и сумму 20 членов прогрессии:

$$3, 7, 11, 15 \dots$$

173. Найти сумму первых десяти чисел натурального ряда.

174. 1) $x^2 + 5 = y^2$. 2) $x^2 - 10 = y^2$.

175. Решить систему:

$$x^2 + x + 1 = y^2;$$

$$x^2 + 2x + 2 = z^2.$$

176. Найти квадратное число, равное сумме квадратов двух чисел.

177. Решить уравнение $x^a + y^a = z^{a+1}$.

178. Если $a = mn$, то показать, что числа $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + a$ и

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a$$

всегда квадратные.

179. На двух противоположных берегах реки стоит по пальме. Высота одной 20 локтей, другой 30. Ширина реки 50 локтей. На вершине каждой из пальм сидит по птице. Обе птицы видят в реке рыбу и летят по прямой линии к ней, одновременно достигая поверхности воды в точке на прямой, соединяющей

корни пальм. Определить длину путей, которые пролетели птицы, и определить место их встречи.

180. Найти стороны прямоугольника, коего площадь численно равна сумме периметра и диагонали, а основание в 3 раза больше высоты.

181. Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

182. Найти диаметр круга, площадь которого равна 100.

183. Определить сторону вписанного в круг правильного двенадцатиугольника.

Ал-Кархи дает словесное выражение, по которому:

$$a_{12}^2 = \left[\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2} \right]^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2.$$

Проверить справедливость этого выражения.

Задача из трактата Табита ибн-Корры

184. Если числа: $p = 3 \cdot 2^n - 1$; $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ и $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ — простые, показать, что числа A и B будут дружественные, если $A = 2^n \cdot p \cdot q$, а $B = 2^n \cdot r$. Применить к частному случаю $n = 2$.

Примечание. Дружественными называют пару чисел, обладающих тем свойством, что первое равно сумме всех делителей второго, а это последнее равно сумме всех делителей первого.

Задачи Ал-Кухи

185. Разделить 10 на такие две части, чтобы сумма, составленная из суммы квадратов этих частей и частного от деления большей части на меньшую, давала 72 (решается элементарным путем).

186. Построить круг, касающийся двух данных прямых, чтобы центр лежал при этом на данной прямой.

Задачи Абул-Вафы

Из трактата „О геометрических построениях“

187. Доказать, что центр круга, вписанного в правильный многоугольник, есть точка пересечения биссектрис двух углов многоугольника.

188. Составить квадрат из двух квадратов, стороны которых неизвестны.

189. Разделить данный квадрат на 2 квадрата при условии что сторона одного из них дана.

190. Построить квадрат, вдвое превосходящий данный.

Задачи Авиценны

191. Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

192. Если число, разделенное на 9, дает в остатке 2 или 7, то квадрат его при делении на 9 дает в остатке 4.

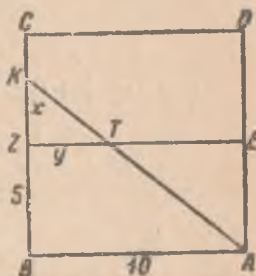
193. Если число, деленное на 9, дает в остатке 1, 4 или 7, то куб его, деленный на 9, дает в остатке 1.

194. Если число, деленное на 9, дает в остатке 2, 5 или 8, то куб его, деленный на 9, дает в остатке 8.

195. Если число, деленное на 9, дает в остатке 3 или 6, то куб его кратен 9.

Задача из арабской рукописи Лейденской библиотеки

196. Дан квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 10$, разделенный пополам линией ZE , параллельной AB . Отсечь секущей, проходящей через вершину A , треугольник KTZ , площадь которого была бы в данном отношении к площади данного квадрата. (Отношение 2:25.)



Черт. 3.

Задача Гассана ибн-Гайтема

197. Дан неправильный четырехугольник. Узнать, можно ли описать около него окружность, не измеряя углов.

Задачи Ал-Кальсади

Из трактата „Раскрытие тайн науки Гобар“

198. Доказать, что

$$\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{n}{4}}} + \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{n}{4}}}.$$

199. В выражении $\frac{a}{m + \sqrt{n}}$ сделать знаменатель рациональным.

200. Правило Ал-Кальсади. Если a^2 — наибольший квадрат, содержащийся в числе, а r — остаток, то

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

если $r \leq a$. Если же $r > a$, то дается более точное значение:

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

Выяснить путь, которому следовал арабский математик в установлении этого правила.

201. 1) $x^2 + 10x = 56$. 6) $4x^2 + 48 = 32x$.
 2) $x^2 + 20 = 12x$. 7) $3x^2 - 36 = 32x - x^2$.
 3) $x^2 + 8x = 20$. 8) $3x^2 = 12x + 63$.
 4) $x^2 + 16 = 8x$. 9) $\frac{1}{2}x^2 + x = 7\frac{1}{2}$.
 5) $6x^2 + 12x = 90$.

Задачи Омар-Хейама

202. $x^2 + 10x = 39$ (решить геометрически).
 203. $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

Задачи Бега-Эддина

Из трактата „Сущность искусства счисления“

204. Разделить число 10 на 2 части, разность которых есть 5.

205. Требуется найти число, которое, будучи умножено само на себя, сложено с двумя, затем удвоено, вновь сложено с тремя, разделено на 5, наконец, умножено на 10, в результате дает 50.

206. Найти число, которое будучи увеличено двумя третями самого себя и единицей, дает 10.

Примечание. Обе последние задачи решаются методом инверсии или, иначе, методом обратных действий.

207. Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

208. По данным: высоте h и радиусам r и R верхнего и нижнего оснований усеченного конуса найти высоту соответствующего полного конуса.

209. Одна третья часть длины рыбы застряла в болоте, одна четверть погружена в воду, а три пяди находятся над поверхностью воды. Определить длину рыбы.

210. Шест торчит в пруде и выходит над поверхностью воды на 5 локтей. Он наклоняется, при чем нижний конец остается неподвижным до тех пор, пока верхний не коснется воды. Определить длину шеста, если известно, что расстояние между местом выхода шеста из воды в первоначальном положении и местом, в котором верхний конец касается воды при наклонении, равно 10 локтям.

211. Разделить число 10 на такие 2 части, что если к каждой прибавить корень квадратный из нее и полученные суммы перемножить, то получится данное число.

Примечание. Задача возможна в смысле деления числа десять на целые части только при условии, что „данное“ число, значение которого автором не указано, равно 24 (если требовать, чтобы оно было рациональным).





Западная Европа

VIII—XV век

Задачи Алкуина

212. Разделить сто мер пшеницы между 100 лицами так, чтобы каждый мужчина получил 3, каждая женщина 2, а каждое дитя $\frac{1}{2}$ меры. Сколько мужчин, женщин и детей?

213. Три наследника получили 21 бочку: 7 — полных, 7 — налитых до половины и 7 — пустых. Разделить наследство так, чтобы каждый из наследников получил столько же вина, сколько и бочек.

Задача из рукописного сборника „Задачи для изощрения ума“

214. Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от нее. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик прыгает на 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?

Задача Герберта

215. По данной площади прямоугольного треугольника и его гипотенузе найти катеты.

Задачи Леонардо Фибоначчи из „Книги абака“

Задача о двух людях

216. Один говорит другому: „Дай мне 7 денариев, и я буду в 5 раз богаче тебя“. А другой говорит: „Дай мне 5 денариев, и я буду в 7 раз богаче тебя“. Сколько у каждого?

217. Семь старух отправляются в Рим. У каждой по семи мулов, каждый мул несет по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всех предметов?

Задача из соч. Леонардо Фибоначчи „De modo solvendi quaestiones avium et simillium“

218. Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждые 3 воробья заплачена 1 монета, за каждые 2 горлицы — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Задача Иоанна Палермского

219. Три человека имеют некоторую сумму денег, при чем часть первого составляет половину, второго — треть и третьего — шестую часть всей суммы. Желая сберечь часть денег, каждый берет из общей суммы сколько может унести, после чего первый отдает на хранение половину, второй — треть, а третий — одну шестую из того, что он нес. Через несколько времени они берут эти деньги обратно, и каждому приходится получить $\frac{1}{3}$ всей суммы, бывшей на хранении. Сколько денег было у каждого?

Задачи на системы уравнений из „Книги абака“

$$220. \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{xy}{x^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad 221. \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y} = 2\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$222. \begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 = 32y \end{cases} \quad 223. \begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{xy}{x - y} = 4\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$224. \begin{cases} x + y = 10 \\ \left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(\frac{y}{x} + 10\right) = 122\frac{2}{3} \end{cases} \quad 225. \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y}(x - y) = 24 \end{cases}$$

$$226. \begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \sqrt{5} \end{cases} \quad 227. \begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ z^2 + y^2 = x^2 \end{cases}$$

Задачи из „Практической геометрии“ Леонардо Фибоначчи

$$228. 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x} = 20.$$

$$229. 3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4.$$

$$230. x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10.$$

231. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

232. Вписать в равносторонний треугольник квадрат, чтобы одна из его сторон лежала на основании треугольника.

233. Доказать, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Задачи Иоанна Палермского, решенные Леонардо

234. Найти квадратное число, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, оставалось бы все-таки числом квадратным.

$$235. \begin{cases} y + \sqrt{x^2 + y^2} = 16 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$236. \begin{cases} xy - y = 42 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$237. \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$238. \begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{xy}{2} \\ xy = 48. \end{cases}$$

$$239. \begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 24 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$240. \begin{cases} xy - x = 40 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Задача из немецкого рукописного сборника XIII века

241. В Кельне было три брата, имевших 9 сосудов с вином. Первый сосуд был емкостью в 1 кварту, второй содержал 2 кварты, и каждый следующий одной quartой больше, так что последний сосуд содержал уже 9 quart. Требуется разделить вино поровну между тремя братьями, не смешивая содержимого сосудов.

Задачи Иордана Неморария

Из трактата „О данных числах“

$$242. \begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{x}{z} = 2 \\ z + u = 12 \\ \frac{y}{u} = 1\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$243. \begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{x}{z} = 3 \\ z + u = 9 \\ y - u = 2. \end{cases}$$

$$244. \begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{x}{z} = \frac{3}{2} \\ z + u = 10 \\ y \cdot u = 36. \end{cases} \quad 245. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \\ x + z = 34 \\ y + z = 24. \end{cases}$$

$$246. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{z} \\ x + z = 25 \\ x + y = 28. \end{cases} \quad 247. \begin{cases} x + y + z + u = 35 \\ \frac{x}{y} = \frac{z}{u} \\ x - y = 5 \\ z - u = 2. \end{cases}$$

$$248. \begin{cases} x + \frac{y + z + u}{2} = 37 \\ y + \frac{x + z + u}{3} = 37 \\ z + \frac{x + y + u}{4} = 37 \\ u + \frac{x + y + z}{5} = 37. \end{cases} \quad 249. \begin{cases} x + 6 = \frac{1}{9}(y + z + u) \\ y + 6 = \frac{1}{3}(x + z + u) \\ z + 6 = \frac{3}{5}(x + y + u) \\ u + 6 = x + y + z. \end{cases}$$

Из трактата „О треугольниках“

250. Из всех треугольников с общим основанием, вписанных в круг, равнобедренный обладает наибольшей площадью.

Задачи Региомонтануса (Иоганн Мюллер)

251. $16x^2 + 2000 = 680x.$

252. $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 25.$

253. Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даст соответственно остатки 15, 11 и 3.

Из трактата „О треугольниках“

254. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

255. В треугольнике разность двух боковых сторон 3, высота 10 и разность отрезков основания, образуемых подошвой высоты, 6. Найти стороны.

256. Найти радиус круга, описанного около треугольника, если даны его стороны.

Задача Кампано из Наварры

*Из комментариев к латинскому переводу с арабского „Начал“
Евклида*

257. Показать, что поверхности вписанных в один и тот же шар правильных додекаэдра и икосаэдра относятся между собой, как их объемы.

Задачи Орезма

$$258. (a^m)^{\frac{1}{n}}; \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} (a^n b)^{\frac{1}{n}}; (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}}; \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}}.$$

Задачи из анонимной итальянской рукописи XIV в.

$$259. x^3 = ax^2 + bx. \quad 260. x^4 = ax^2 + b.$$

Задачи Видмана

261. По данным трем сторонам прямоугольного треугольника определить радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

262. Вписать в данный полукруг наибольший квадрат.

263. Стороны треугольника 13, 14, 15. Приняв последнюю сторону за основание, найти высоту и отрезки основания.

264. Дан равносторонний треугольник. Определить радиусы вписанной и описанной окружностей.

265. Если h —высота треугольника, b —основание, x —меньший из его отрезков, то радиус описанного круга по Видману выражается формулой:

$$r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h}\right)^2}$$

Проверить справедливость этой формулы.

Задача из Мюнхенской рукописи Фредерича

$$266. 43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31u + 17.$$

Задача из немецкого алгебраического рукописного трактата
из Мюнхенского собрания

$$267. x + \sqrt{x^2 - x} = 2.$$

Задача из собрания примеров на латинском языке из той же рукописи

268. Некто имеет работников и деньги. Если он даст каждому работнику 5 (монет), у него останется 30, а если 7, то нехватит 30. Спрашивается, сколько у него работников?

Задачи Н. Шюке из трактата 1484 г.

269. $3x^2 + 12 = 12x$.

270. $3x^2 + 12 = 30x$.

271. $3x^2 + 12 = 9x$.

272. $144 + x^2 = 36x$.

273. $6x^4 + 24 = 2x^2$.

274. $32x^5 + 8x = 192x^3$.

275. $1728x^3 = 512 + 64x^6$.

276. $12 + 6x^8 = 144x^4$.

277. $243 + 2x^{10} = 487x^5$.

278. $\sqrt{12x - x^2} + 1 = \sqrt{36 - x^2}$.

279. $\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1 = 100$.

280.
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y + \frac{1}{2}z = 12 \end{cases}$$

281.
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 5y + 3z = 60 \end{cases}$$

282.
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 4x + 3y + 2z = 36 \end{cases}$$

Задачи из немецкого рукописного трактата 1481г. из Дрезденского собрания

283. Перемножить: $4x - 5$ и $2x - 3$.

284. Как велико число, равное произведению $\frac{4}{5}$ его на $\frac{5}{6}$ того же числа?

Задача из алгебраической латинской рукописи из Дрезденского собрания

285. Число 10 разделить на две такие части, чтобы после умножения первой на 5 и деления полученного произведения на вторую часть получилось $\frac{10}{3}$.

Задачи из немецкого рукописного трактата из Мюнхенского собрания

286. В расстоянии 6 футов от берега ручья стоит дерево высотой 20 футов. Спрашивается: на какой высоте должно надломиться дерево, чтобы вершина его коснулась берега?

287. Лестница длиной 13 футов наклонно приставлена к стене, нижняя часть ее при этом удалена от стены на 5 футов. На сколько спустится она по стене, если ее основание отодвинуть еще на 7 футов?

XVI век

Задача Бувелля

288. Показать, что всякое совершенное число (кроме 6) имеет вид $9n + 1$.

Задача Ретикуса

289. Если стороны остроугольного треугольника a, b, c , а перпендикуляр, опущенный из вершины угла, противоположного стороне a , разбивает эту сторону на отрезки, из которых меньший есть p , то

$$\frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a-2p}.$$

Задача Лука де Бурго (Пачиоло)

290. Перемножить: $(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{3}) \cdot (\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{3})$.

291. Чему равно $(\sqrt{\sqrt{40+6}} + \sqrt{\sqrt{40-6}})^2$.

292. Найти число, которое, будучи умножено на 5, дает столько, сколько его квадрат, сложенный с четырьмя.

293. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81600 = 0$$

(решается элементарно).

294. Дается радиус (4) вписанного в треугольник круга и отрезки 6 и 8, на которые точка касания делит одну сторону треугольника. Найти две другие стороны.

295. По данным сторонам треугольника и взятым на двух из них точкам определить длину прямой, соединяющей эти точки.

296. По данным площади и разности сторон прямоугольника найти его стороны.

297. Вписать в треугольник два равных круга, чтобы каждый касался двух сторон и чтобы они соприкасались между собой.

298. Определить диаметр круга, касающегося двух сторон данного треугольника и имеющего центр на третьей стороне.

299. Найти стороны треугольника с площадью, равной 84, если известно, что они выражаются тремя последовательными целыми числами.

300. Вписать в данный круг 3, 4, 5 или 6 кругов, равных между собой, касающихся данного и в то же время последовательно касающихся один другого.

301. Сумма квадратов двух чисел 20, а произведение 8. Найти эти числа.

Задачи Г. Шрейбера (Грамматеус)

302. Перемножить $6x - 8$ и $5x - 6$.

303. $3x^2 = 27$. $2x^2 + x = 55$. $2x^2 + 18 = 15x$.

304. $2x^3 = 128$. 305. $5x^4 = 20480$.

Задачи из трактата „Учение о целых числах и дробях“

306. По данному катету и сумме двух других сторон прямоугольного треугольника определить эти стороны.

307. Дана гипотенуза и сумма катетов. Найти катеты.

Задачи Адама Ризе

308. Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась $\frac{1}{4}$ этой суммы, на долю второго $\frac{1}{7}$, а на долю третьего 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

309. 26 персон издержали вместе 88 монет, при чем каждый мужчина тратил 6, женщина 4, а девица 2 монеты. Сколько было мужчин, женщин и девиц? ✓

310. Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: „Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь“. Второй говорит первому и третьему: „Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь“. Наконец, третий говорит первым двум: „Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя“. Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого?

311. $3x^2 = \sqrt{36x^2}$. $3x^2 + 21 = 24x$.

Задача из „Тайны чисел“ Бунгуса

312. Всякое простое число, кроме 1, 2 и 3, имеет форму $6m \pm 1$.

Задачи Кристофа Рудольфа

313. Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?

314. Разделить $\sqrt[3]{216}$ на $\sqrt[4]{16}$.

315. Решить систему уравнений: $x - y = a$; $xy = b$.

Задачи из „Coss“ Рудольфа в обработке Стифеля

316.
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 539\ 200 \\ (x-y)(x^2-y^2) = 78\ 400. \end{cases}$$

317.
$$\begin{cases} xy + x + y = 573 \\ x^2 + y^2 - x - y = 1716. \end{cases}$$

318.
$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 675 \\ (x-y)(x^2+y^2) = 351. \end{cases}$$

Задачи М. Стифеля

319. Если написать прогрессию $\div 4, 8, (16, 32), \dots, (2^{2n}, 2^{2n+1})$, то всякая пара чисел, стоящая в скобках, дает совершенное число, если умножить большее из чисел этой пары, уменьшенное единицей, на меньшее.

Примечание. При условии, что $2^{2n+1} - 1$ есть число простое. Стифель упустил это из виду.

320. Сложить: $\frac{3}{2}x$ и $\frac{4x^2}{3x^3}$.

321. Вычесть: $\frac{9x^4 + 8x^2}{6x^3} - \frac{3}{2}x$.

322. Умножить: $\frac{9x^4 + 8x^2}{6x^3} \cdot \frac{3x}{2}$.

323. Разделить: $\frac{27x^5 + 24x^3}{12x^3}$ на $\frac{3x}{2}$.

324. Сократить: $\frac{27x^5 + 24x^3}{12x^3}$.

325. Перемножить: $(6x^2 + 8x - 6)(2x^2 - 4)$.

326. Решить уравнение: $x^2 = 12x - 36$.

327. Решить уравнение:

$$216 + \sqrt{41\ 472} - 18x - \sqrt{648x^2} = 0$$

(первый в истории математики пример уравнений с нулем во второй части).

328. Показать, что $\sqrt{16} + \sqrt[3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

329. $(\sqrt{12 + \sqrt{6}} + \sqrt{12 - \sqrt{6}}) \cdot (\sqrt{12 + \sqrt{6}} + \sqrt{12 - \sqrt{6}})$.

330. Выразить через радиус описанного круга сторону правильного пятиугольника и его диагональ.

Задача Жана Бютео

331.
$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 14 \\ y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z = 8 \\ z + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y = 8. \end{cases}$$

Задача Педро Нунеса

332. Разделить: $12x^3 + 18x^2 + 27x + 17$ на $4x + 3$.

Задачи Петра Рамуса

333. Умножение многочленов:

1) $(7x^2 - 4x) \cdot 9x$

2) $(8x^2 + 9) \cdot (7x^2 + 4)$

334. Перемножить: $(\sqrt{8} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

Задачи Н. Тарталья

335. Пользуясь одним раствором циркуля и линейкой разделить прямую на любое число равных частей.

336. На данном отрезке AB построить с помощью данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки равносторонний треугольник.

Задачи Д. Кардано

337. Перемножить: $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$.

338. $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = ?$

339. Решить уравнение:

$$13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1.$$

340. Найти построением положительный корень уравнения:

$$x^2 + 6x = 91.$$

341. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

Задачи Бенедиктуса

342. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c. \end{cases}$$

Приняв a, b, c за стороны треугольника, истолковать корни этой системы геометрически.

343. По двум данным линиям найти третью, чтобы ее произведение на сумму ее с первой из данных линий равнялось квадрату второй данной линии.

Задачи Кристофа Клавия

344. Решить уравнение:

$$\frac{4x + 18}{x} = \frac{12x - 38}{2}.$$

345. Провести из внешней точки касательную к окружности.

Задачи Виета

346. Решить уравнение $x^2 + px + q = 0$ подстановкой $x = y + z$ и определяя z (пользуясь его произвольностью) так, чтобы получить неполное квадратное уравнение (т. е. не содержащее первой степени неизвестного).

347. Если дано кубическое уравнение:

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc,$$

то a, b и c — корни этого уравнения.

Проверить на уравнениях.

$$1) x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

$$2) x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0.$$

348. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, то $\sqrt{a^2 + b^2}$ выражает гипотенузу, а если a — катет и c — гипотенуза, то $\sqrt{c^2 - a^2}$ выражает другой катет. Пользуясь этим, построить: $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{11}$, $a\sqrt{13}$, $a\sqrt{17}$, $a\sqrt{26}$, $a\sqrt{34}$.

349. Решить уравнение:

$$\frac{ax}{b} + \frac{ax - ac}{d} = a.$$

350. Решить уравнение:

$$y^6 + 2b^8y^8 = a^9.$$

Задачи Бомбелли

351. Показать, что

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4.$$

352. Решить уравнение:

$$x^8 = 15x + 4$$

XVII век

Задачи Т. Гарриота

353. Перемножить: $(x + b)(x + c)(x - d)$.

354. Решить уравнение:

$$52 = -3x + x^8.$$

Задачи А. Жирара

355. $x^8 = 13x + 12$. **356.** $x^4 - 4x + 3 = 0$
(обе задачи решаются элементарно).

357. Перемножить: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{4}$.

Задача Кеплера

358. Решить уравнение:

$$5x - 5x^8 + x^5 = 0.$$

Задачи С. Стевина

359. Перемножить: $2x^3 - 4x^2 + 3x$ и $2x^4 + 3x^3$.
Примеры на умножение и деление многочленов.

360. 1) $\frac{2x}{y^2} \cdot \frac{3x^2}{z^2}$; 2) $6x^3y : \frac{2x}{z^2}$.

361. 1) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{2x^3}$

2) $\sqrt{3 \cdot x} \cdot \sqrt{2 \cdot x^2}$

3) $\sqrt{\sqrt{3x^2} + \sqrt{2x}} \cdot \sqrt{\sqrt{5x^2} + \sqrt{4x}}$.

362. $(\sqrt{5 + \sqrt{3}} + \sqrt{5 - \sqrt{3}})^2 = ?$

363. Решить уравнение:

$$x^9 = 3x^6 + 5x^3.$$

364. Решить уравнение:

$$x^3 = 6x + 40.$$

Задача Валлиса

365. Показать алгебраически и геометрически, что из прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

Задачи из трактата „Чародей-математик“

366. Даны три сосуда в 3, 5 и 8 единиц объема. Первые два пустые, а третий полный. Разделить путем переливания содержимое третьего сосуда на две равные части.

367. Существуют ли на свете два человека с одинаковым числом волос на голове?

Задачи Декарта

368. $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$.

369. $y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0$.

370. $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

Задачи Эразма Бартолина

Из обработки лекций ван-Скоутена по геометрии Декарта

371. Перемножить: $4a^3 + 3a^2 - 2a + 1$ и $a^2 - 5a + 6$.

372. $\frac{(5 - x)(x^2 + 12)}{\sqrt{x^2 + 12}}$.

373. Решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{z^2 + 3a^2}{4}} - \sqrt{\frac{z^2 - 3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{az^2}{b}}.$$

Задачи Ферма

374. Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\div a_1, a_2, a_3, \dots$, то $\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$.

Из письма к Робервалю

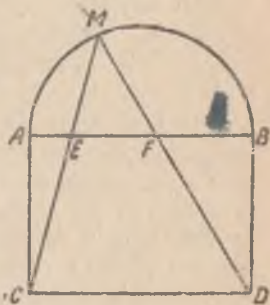
375. Проверить, что

$$5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (4n + 2) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

376. Доказать, что если целое число N не делится на простое число p , то $N^{p-1} - 1$ кратно p .

377. Разделить данное число на такие две части, чтобы произведение их имело наибольшую величину (решить элементарно).

378. На диаметре AB полуокруга AMB строим прямоугольник, высота которого AC равна стороне вписанного в круг квадрата. Если соединить вершины C и D с произвольной точкой M полуокруга прямыми CM и DM , пересекающими диаметр в точках E и F , то будем иметь: $AF^2 + BE^2 = AB^2$.



Черт. 4.

Задача Томаса Строда

379. Построить среднюю пропорциональную между двумя данными линиями без описывания окружностей и проведения перпендикуляра.

Задача Паскаля

380. Найти общий признак делимости на произвольное число.

Задачи Баше де-Мезирака

381. Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, а брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нем может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег?

382. Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на весах любое целое число фунтов от 1 до 40 при условии, что при взвешивании гири можно класть на обе чашки весов.

383. Трое имеют известную сумму экую каждый. Первый дает из своих денег двум другим столько, сколько есть у каждого. После него второй дает двум другим столько, сколько каждый из них имеет. Наконец, и третий дает двум другим столько, сколько есть у каждого. После этого у каждого оказывается по 8 эку. Спрашивается, сколько денег было у каждого вначале?

Задачи Озанама

384. Семеро друзей собрались к обеду, но между ними возник церемонный спор, кому и с кем садиться. Чтобы прекратить пререкания, кто-то из присутствующих предложил всем сесть за стол как придется, но с условием, чтобы вновь собраться на другой день и затем в следующие дни обедать вместе, при чем каждый раз садиться по-разному до тех пор, пока не будут испытаны все возможные комбинации. Спрашивается, сколько раз придется им обедать вместе для этой цели?

Примечание. Озанам дает ответ: 5040 раз. Прав он или ошибается?

385. Трое хотят купить дом за 26 000 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — одну четверть. Сколько даст каждый?

Задачи Лейбница

386. 1) Показать, что $m^5 - m$ делится на 5.

2) Показать, что $m^7 - m$ делится на 7.

387. Показать, что $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$.

Задачи Ньютона

Из трактата „Всеобщая арифметика“

388. 1) Перемножить двучлены:

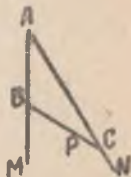
$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}} \text{ и } 3a + \sqrt{\frac{ab^3}{c}}.$$

2) Разделить: $y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4$ на $y^2 - 2ay + a^2$.

Из трактата „Начала“

389. Через данную точку P провести прямую BC так, чтобы ее отрезки PB и PC , отсекаемые заданными по положению прямыми AM и AN , находились в данном друг к другу отношении.

390. Расположить вершины треугольника, по виду и величине равного заданному, так, чтобы каждая из них лежала на одной из трех заданных непараллельных прямых.



Черт. 5.

XVIII век

Задачи Маклорена

391. Решить систему:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 26, \\ x - y &= 4, \\ x - z &= 6. \end{aligned}$$

392. Преобразовать:

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}.$$

393. Несколько человек обедали вместе и по счету должны уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег, поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на их долю. Сколько человек обедало?

394. Решить уравнение: $x^6 - 19x^3 = 216$.

Задачи Ламберта

395. Показать что всякий нечетный квадрат, уменьшенный единицей, всегда делится на 8.

396. Если нечетный квадрат, некратный 9, уменьшить на единицу, результат разделится на 24.

Задача Вариньона

397. Если две смежные стороны параллелограмма и диагональ, выходящую из той же вершины, спроектировать на какую-нибудь прямую, то проекция диагонали будет равна сумме или разности проекций сторон.

Задача Клеро

398. На неограниченной прямой, соединяющей два источника света, найти точку, равно освещенную обоими источниками.

Задача Симсона

399. Показать, что если из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, опустить на его стороны перпендикуляры, то их основания лежат на одной прямой.

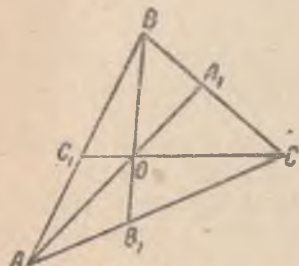
Задача Моавра

400. Показать, что всякое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$ и при почленном делении обеих частей уравнения на $x + 1$ дает опять-таки возвратное уравнение степени на единицу меньшей.

Задача Гольдбаха

401. Доказать, что при a и b целых и положительных сумма всех дробей вида $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ имеет пределом единицу.

Задача Джiovанни Чева



Чев. т. 6.

402. Если через вершины A, B, C треугольника ABC и произвольную точку O его плоскости проведены прямые, встречающие стороны AB, AC, BC соответственно в точках C_1, B_1 и A_1 , определяя на каждой из них два отрезка, то произведения каждых трех отрезков, не имеющих общей вершины, равны между собой: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$.

Задача Чеппля

403. Показать, что если a, b, c — стороны треугольника, R и r — соответственно радиусы кругов описанного и вписанного, то

$$R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{2(a + b + c)}.$$

Задача Лежандра

404. Определить площадь вписанного в круг четырехугольника по данным сторонам a, b, c, d .

Задачи Эйлера

405. Преобразовать

$$\frac{8 - 5\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}.$$

406. Рационализировать $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx)}$ подстановкой $y = (a + bx)z$.

407. Рационализировать $y = \sqrt{a^2 + bx + cx^2}$ подстановкой $y = a + xz$.

408. Найти число, четвертая степень которого, деленная на половину самого числа и увеличенная на $14\frac{1}{4}$, равнялась бы 100.

409. Каждый из нескольких купцов внес в общее дело 100 раз столько рублей, сколько было купцов. Они отправили в Венецию доверенного, получавшего с каждой сотни рублей число рублей, вдвое большее числа купцов. Спрашивается: сколько было купцов, если доверенный получил 2662 рубля?

410. Некто продает свою лошадь по числу подковных гвоздей, которых у нее 32. За первый гвоздь он просит 1 пфенниг, за второй 2, за третий 4, за четвертый 8 пфеннигов и всегда за следующий вдвое больше, чем за предыдущий. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь?

411. Определить рациональные значения для x и y в уравнении: $x^y = y^x$.

412. Показать, что в треугольнике расстояние центров описанной и вписанной окружностей есть среднее пропорциональное между радиусом первой и избытком его над диаметром второй.

413. Показать, что если N_1 и N_2 — числа взаимно простые, k — число целых чисел, меньших N_2 и первых с ним, то $N_1^k - 1$ кратно N_2 .

414. Если p — число простое, а m — какое-нибудь целое число, то $m^p - m$ кратно p .

415. Если A — число ребер, F — число граней и S — число вершин сомкнутого многогранника, то показать, что всегда:

$$A + 2 = F + S.$$

416. Произведение двух чисел, из коих каждое есть сумма четырех квадратов, также равно сумме четырех квадратов.

417. Доказать правильность тождества:

$$p^3 = \left(p^3 \cdot \frac{p^3 - 2q^3}{p^3 + q^3} \right) + \left(q^3 \cdot \frac{2p^3 - q^3}{p^3 + q^3} \right) + q^3.$$

418. Если предположить, что человеческий род размножился от 6 человек и что двести лет спустя число людей возросло до миллиона, спрашивается: на какую часть должно было увеличиться население ежегодно?

Задача Мальфатти

419. Дан треугольник. Требуется построить три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других окружностей и двух сторон треугольника.

Задача Маскерони

420. С помощью только одного циркуля требуется по трем данным отрезкам a, b, c построить четвертый пропорциональный.

421. Из произвольной, взятой на данной окружности O , точки A , принятой за центр, описываем радиусом OA дугу, которая в точке B пересечет окружность. Из B тем же радиусом опишем дугу, пересекающую окружность в точке C . Из C тем же радиусом опишем дугу, пересекающую окружность в точке D . Из точек A и D радиусами AC, DB описываем дуги, которые пересекутся вне окружности в точке E . Из B радиусом BE описываем дугу, которая в точке F пересечет полуокружность $ABCD$. Показать, что хорда AF будет иметь длину, приблизительно равную длине четверти окружности. Найти точность приближения.

Задача Софи Жермен

422. Показать, что число вида $n^4 + 4$ есть составное ($n > 1$).

Задачи Лагранжа

423. Если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии делится на 6 (исключение представляет случай, когда одно из этих чисел есть 3).

424. Проверить тождество:

$$(A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (AA_1 + BB_1 + CC_1)^2 = \\ = (AB_1 - A_1B)^2 + (AC_1 - A_1C)^2 + (BC_1 - B_1C)^2.$$

425. Дано уравнение: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Показать, что подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$ можно свести решение этого уравнения к решению двух квадратных уравнений, корни которых и будут корнями данного.

Задачи Безу

426. Работнику объявили, что он будет получать по 24 су за каждый отработанный им день при условии удерживать по 6 су за каждый прогульный день. По истечении 80 дней оказалось, что ему ничего не пришлось получить. Спрашивается: сколько дней он работал?

427. Решить систему:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 65, \\ 2y - z &= 11, \\ 3x + 4z &= 57. \end{aligned}$$

428. Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

429. Из точки вне данного круга провести секущую так, чтобы внутренняя часть ее имела данную длину.

Задача Рейно

430. Некто, умирая, оставил завещание, согласно которому старший сын получает из полного наследства 100 франков и десятую часть остатка, второй — 200 франков и десятую часть

нового остатка, третий — 300 франков и десятую часть нового остатка и так далее до последнего. При этом доли всех сыновей должны быть равными. Найти размер оставленного наследства, число сыновей и долю каждого.

Задачи Франкера

431. Из a карт составляют b кучек, при чем в каждой c очков. 1-я карта каждой кучки считается за 11 очков, если она туз, 10 очков — если фигура или десятка, и т. д. Прочие карты считаются за одно очко. Если, составивши кучки, будем иметь в остатке d карт, требуется определить сумму x очков одних первых карт.

432. Разбить на две дроби дробь $\frac{n}{d}$, знаменатель которой d есть произведение двух чисел a и b , не имеющих общего делителя $\left(\frac{n}{d} = \frac{58}{77}\right)$.

433. Несколько человек должны заплатить 800 франков за производство судебного дела. Но у троих нет денег, и поэтому остальным приходится к своей доле добавить по 60 франков. Сколько всех участников в платеже судебных издержек?

434. Сколько раз пробьют часы в продолжении 12 часов, если они отбивают и получасы?

435. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

XIX век

Задачи Лакруа

436. Что стоят $15\frac{13}{16}$ локтя материи, если один локоть стоит 42 ливра 17 су 11 денариев?

Примечание. Ливр — старинная французская монета; один ливр = 20 су; 1 су = 12 денариев.

437. Один фонтан наполняет бассейн в $2\frac{1}{2}$ часа, другой — в $3\frac{3}{4}$ часа. Во сколько времени оба фонтана, действуя вместе, наполнят бассейн?

438. Сколько километров проедет путешественник в 17 дней, тратя на это по 10 часов в день, если он уже проехал в 29 дней 112 километров, находясь в пути 7 часов каждый день?

439. Восставить перпендикуляр в конце прямой, не продолжая ее за этот конец.

440. Описать окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся прямой, данной по положению.

441. Описать окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данного круга в данной на нем точке.

442. Преобразовать данный неправильный пятиугольник в равновеликий четырехугольник.

Задача Мейера Гирша

443. Доказать, что в прямоугольном тетраэдре квадрат площади грани, лежащей против прямого трехгранного угла, равен сумме квадратов площадей трех остальных граней.

Задачи Люиле

444. Если r — радиус круга, вписанного в треугольник, а r_1, r_2, r_3 — радиусы внеписанных кругов, то показать, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

445. Если Q есть площадь треугольника, то показать, что

$$Q^2 = rr_1r_2r_3.$$

Задачи из „Курса математики“ Аллеза, Билли, Пюиссана и Будро

446. Желая определить среднюю дальность полета снаряда из некоторого артиллерийского орудия, сделали 100 пробных выстрелов и нашли, что

18	выстрелов	дали дальность	632	метра
25	"	"	628	метров
53	выстрела	"	620	"
4	"	"	640	"

Какова средняя дальность?

447. 600 учеников занимают четырехэтажный корпус учебного заведения. В первом помещается учеников вдвое более, чем в четвертом. Число учеников, размещенных во втором и третьем

этажах, равно числу учеников в первом и четвертом этажах, а в одном третьем число их составляет $\frac{5}{7}$ того, что есть во втором. Сколько учеников помещается в каждом этаже?

448. Полк кирасир покупает некоторое количество лошадей за 11250 франков. Полк драгун покупает пятнадцатью лошадьми более за 16000 франков. Каждая драгунская лошадь на 50 франков дешевле кирасирской. Определить число лошадей каждого типа и их стоимость.

449. Извлечь корень квадратный из многочлена:

$$16ac + 4a^2 - 12ab + 9b^2 - 24bc + 16c^2.$$

450. Суммировать:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$c) \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

451. По данному периметру правильного вписанного в круг многоугольника найти периметр одноименного описанного многоугольника.

452. Сумма трех сторон прямоугольного треугольника 156 метров. Площадь равна 1014 квадратным метрам. Найти стороны.

Задачи Гарнье

453. Даны две хорды и их расстояния от центра. Найти хорду, стягивающую дугу, равную разности дуг, соответствующих данным хордам, и ее расстояние от центра.

454. Показать, что вопрос о вписывании в круг правильного семиугольника приводит к составлению кубического уравнения.

Задача Гаусса

455. Показать, что произведение двух целых положительных чисел, из которых каждое меньше простого числа p , не делится на p .

Задачи Коши

456. Разложить дробь $\frac{2}{x^2-1}$ на сумму двух дробей

$$\text{вида } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

457. Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$, то численная величина каждой дроби равна:

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots}}$$

458. Если перемножить между собой два целых числа, из которых каждое есть сумма двух квадратов, то полученное произведение будет также состоять из суммы двух квадратов.

Задачи Штейнера

459. Если соединить точку E пересечения диагоналей трапеции с точкой F пересечения ее непараллельных сторон, то большее основание разделится пополам линией EF .

460. В плоскости чертежа дана окружность; опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую с помощью только прямых линий.

461. Из всех треугольников того же периметра и основания равнобедренный имеет наибольшую площадь.

462. На прямой даны три точки G, D, F , из которых D лежит посередине между двумя остальными; нужно при помощи только линейки провести через произвольную точку H прямую, параллельную данной.

Задача Бинэ

463. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} z + ay + a^2x + a^3 &= 0, \\ z + by + b^2x + b^3 &= 0, \\ z + cy + c^2x + c^3 &= 0. \end{aligned}$$

Задачи Бурдона

464. Число состоит из трех цифр; сумма этих цифр равна 11; цифра единиц вдвое больше цифры сотен. Если прибавить к искомому числу 297, то получается число, написанное теми же цифрами, как у искомого, но в обратном порядке. Какое число имеет эти свойства?

465. Найти четыре члена геометрической пропорции по известной сумме $2S$ крайних, сумме $2S_1$ средних и сумме их квадратов $4C^2$.

Задача, предложенная комиссией Парижской академии (Коши, Лиувиль, Штурм и Араго) феноменальному вычислителю Анри Мондэ

466. Каковы два квадратных числа, разность которых 133?

Задачи Монферрье

467. Разделить данное число p на такие две части, чтобы сумма частных от деления первой на m , а второй на n равнялась данному числу q .

468. Решить уравнение:

$$x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

469. Решить уравнение:

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 85x - 28 = 0$$

(решается элементарным путем).

470. Решить уравнение:

$$a^{4x} = c.$$

Задача, носящая название „задачи Пуассона“

471. Некто имеет двенадцать пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в шесть пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт; спрашивается: каким образом налить шесть пинт в сосуд в восемь пинт?

Задача Лебега

472. Решить в целых числах систему:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 131, \\ 2x + 3y + 8z &= 140. \end{aligned}$$

Задачи Шлёмилха

473. Решить кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

если корни его составляют:

- 1) арифметическую прогрессию;
- 2) геометрическую прогрессию;
- 3) гармонический ряд.

474. Показать, что при $n > 2$ имеет место неравенство:

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \dots n^2 > n^n.$$

Задачи Бертрана

475. Доказать, что

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

476. Доказать, что

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

477. Доказать, что

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3.$$

478. Решить уравнение:

$$(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}.$$

479. Решить уравнение:

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}.$$

480. Чему равно основание системы логарифмов, в которой 6 есть логарифм 729?

Задача Бахвитца

481. Показать, что всякое целое число, представляющее сумму трех квадратов, может быть представлено в виде суммы квадратов четырех дробей.

Задача из „Сборника математических задач“

482. Три крестьянина Джон, Питер и Алексис пришли на рынок со своими женами Мэри, Китти и Дженни. Узнать, кто на ком женат, если известно, что каждое из этих шести лиц заплатило за каждую купленную вещь столько пенсов, сколько

вещей им куплено. Каждый мужчина истратил на 63 пенса больше своей жены. Кроме этого, Джон купил 23 вещами больше Китти, а Питер 11 вещами больше Мэри.

Задачи Каталана

483. Из точки A вне окружности провести секущую так, чтобы она разделилась окружностью пополам.

484. В данный круг вписать шесть правильных пятиугольников так, чтобы центр одного совпал с центром данного круга, а каждый из остальных пяти имел одну вершину на окружности.

485. Разбить данный правильный шестиугольник на 7 правильных шестиугольников и 12 равносторонних треугольников.

486. Отсечь плоскостью сегмент от шара так, чтобы объем его был в данном отношении m к соответствующему сферическому сектору.

Задача Нейберга

487. Около данного четырехугольника описать четырехугольник — подобный другому данному четырехугольнику.

Задача Бретшнейдера

488. Бретшнейдер дает для π построение, точное до пятого десятичного знака: $\frac{13}{50} \sqrt{146}$, если принять радиус окружности за единицу; построить это приближение.

Задачи Желена

489. Какое число следует прибавить к каждому из членов дроби $\frac{3}{11}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{9}$?

490. Пять разбойников отняли у прохожего кошелек, наполненный дукатами. Самый сильный из них взял 81 дукат, каждый из 4 остальных неодинаковую сумму. Вследствие неравного раздела возник спор, и пришедший в то время атаман приказал, чтобы тот, кто взял больше всех, удвоил каждому из остальных число его дукатов и чтобы то же самое сделал затем захвативший второе по величине количество дукатов, потом захвативший третье, четвертое и пятое. В результате оказалось, что каждый из 5 разбойников получил одно и то же число дукатов. Узнать, сколько дукатов было в кошельке и сколько из них каждый захватил вначале.

Задачи из „Трактата по геометрии“ Э. Руше и Ш. Комберусса

491. Найти отношение объемов, получаемых при последовательном вращении параллелограмма около каждой из двух смежных сторон.

492. Объемы, получаемые от вращения прямоугольника около каждой из его сторон, соответственно равны a куб. м и b куб. м. Найти длину диагонали прямоугольника.

493. Высота усеченного конуса 3 метра, а радиусы его оснований 1 и 2 метра. Разделить объем на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 7, двумя плоскостями, параллельными основаниям.

Задачи из курса „Элементы математики“ Р. Бальтцера

494. Построить треугольник по данному углу, противолежащей стороне и сумме двух других сторон.

495. Система уравнений 2-й степени:

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx^2 + dy^2 &= g. \end{aligned}$$

496. Система уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= xy \\ x + y &= xy. \end{aligned}$$

497. Показательное уравнение:

$$x^a + b \lg x = c.$$

Задача Штурма

498. Из A выезжает курьер и в первый день проезжает 10 лье, а в каждый следующий — на $\frac{1}{4}$ лье больше. Спустя три дня другой курьер выезжает из города B , расположенного за городом A в 40 лье, и едет в том же направлении, при чем в первый день проезжает семь лье, а в каждый следующий — на $\frac{2}{3}$ лье больше. Через сколько дней после выезда первого оба курьера встретятся?

Задача Маннгейма

499. Через точку P проводят прямую, встречающую данные перпендикулярные прямые OX и OY в точках A и B . Затем из P восстанавливают перпендикуляр к AB , встречающий прямые

OX и OY в точках A_1 и B_1 . Из точек A_1 и B_1 опускают перпендикуляры на OP , отсекающие на прямой AB отрезок A_2B_2 . Доказать, что $AB = A_2B_2$.

Задача Кэзи

500. В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от сторон треугольника была бы минимальной.

Задачи из „Journal de Mathématiques elementaires“, par M. Vulbert

501. У торговца заведомо неверные весы. Первому покупателю он отпускает один фунт товара с одной чашки весов. Второму покупателю он отвешивает один фунт того же товара на другой чашке, думая, что он при этом компенсирует неточность отвешивания. Спрашивается, выгадал в действительности торговец или остался в убытке?

502. Доказать, что при всяком целом значении n число $n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26)$ кратно 120.

Задача из „Journal de Mathématiques speciales“

503. Найти треугольник, стороны которого a , b и c и площадь S выражаются четырьмя последовательными целыми числами.

Задача из „L'Education mathématique“

504. Доказать, что при p целом и положительном выражение $4^{2p} - 3^{2p} - 7$ кратно 84.

Задача из „Supplemento al Periodico di Matematica“

505. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 1, \\ xy + xz + yz &= 27.\end{aligned}$$

Задача из „Mathesis“

506. Решить в целых числах неопределенное уравнение:

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2 + v^2 + w^2 + t^2.$$

Задачи, предложенные Оксфордской испытательной комиссией
при поступлении в университет

507. 1) Дано, что $a = x^l$; $b = x^m$; $c = x^n$. Выразить дробь $\frac{a^p \cdot b^q}{c^r}$ степенью x . Если $x = 3$, а дробь $\frac{a^p \cdot b^q}{c^r} = \sqrt[3]{243}$, показать,

что $lp + mq - nr = 2\frac{1}{2}$.

2) Чашка, имеющая вид полушария, наполнена водой, а затем наклонена на угол 45° . Доказать, что выльется около $88\frac{1}{2}\%$ воды.

Задача, предложенная при испытаниях на степень бакалавра
во французской школе

508. Четверть круга AOB вращается около радиуса OB . На каком расстоянии OP от центра O надо провести прямую PD , параллельную прямой OA , чтобы кольцо, описанное отрезком CD , отсекаемым между хордой AB и окружностью, имело данную площадь πm . Найти максимум этой площади при изменении расстояния OP от 0 до $OB = a$.



ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

С ИСТОРИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ

Вавилон

Древний Вавилон оказал огромное влияние на развитие цивилизации. Благодаря раскопкам, в которых в XIX веке принимали участие экспедиции из Европы и Америки, найден ряд интереснейших памятников вавилоно-ассирийской письменности в виде глиняных табличек, испещренных особыми клинописными знаками. Ученым удалось их расшифровать, при чем выяснилось, что вавилоняне уже за 3000 лет до нашей эры обладали сложившейся культурой. Они производили астрономические наблюдения, имели разработанную систему мер (метрологию) и некоторые навыки в решении геометрических вопросов практического характера, а при счете пользовались так называемой „сексагезимальной“ системой нумерации, основанием которой является число 60. По этой системе всякое число представляется по схеме:

$$N = a \cdot 60^n + a_1 \cdot 60^{n-1} + \dots + a_{n-3} \cdot 60^3 + a_{n-2} \cdot 60^2 + \\ + a_{n-1} \cdot 60 + a_n,$$

но ввиду того, что между 60 и 3600 (т. е. 60^2) интервал слишком велик, они для практического удобства вставляли промежуточную единицу: $600 = 60 \cdot 10$.

1. 195 955 200 000 000.

2. $1 \cdot 21 = 1 \cdot 60 + 21 = 81 = 9^2$.
 $2 \cdot 1 = 2 \cdot 60 + 1 = 121 = 11^2$ и т. д.

3. $2 \cdot 5 = 2 \cdot 60 + 5 = 125 = 5^3$.
 $3 \cdot 36 = 3 \cdot 60 + 36 = 216 = 6^3$ и т. д.

4. В десятичной системе будем иметь прогрессию:
 $\div 96, 112, 128, 144 \dots$

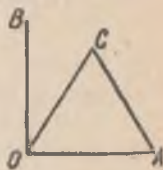
5. Если даны два числа a и b , то их среднее гармоническое есть: $\frac{2ab}{a+b}$. Очевидно, что $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$.

6. 1) 800 шар. 2) 900 шар. 3) 1750 шар.

4) 18 ган 1200 шар.

7. Английский ассириолог Смит упоминает о найденной им табличке, содержавшей решение этой задачи.

Поскольку вавилоняне умели строить равносторонний треугольник, задача разрешалась легко: если на стороне OA прямого угла AOB построить такой треугольник AOC , ясно, что угол BOC составит одну треть прямого. Тогда для решения задачи остается только разделить угол AOC пополам.



Черт. 7.

8. Так как сторона шестиугольника равна радиусу, то $2\pi R = 6R$, откуда $\pi = 3$.

9. Если назвать пары противоположных сторон четырехугольника a, b и c, d , то площадь

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}.$$

При $a=b$ и $c=d$ четырехугольник превращается в прямоугольник и $S = a \cdot c$.

Египет

Вторым древнейшим культурным центром древности на Ближнем Востоке является Египет. В XIX веке ученым удалось расшифровать сохранившиеся памятники египетской письменности в виде целого ряда надписей на камне и так называемых „папирусах“ — свитках (в виде ленты) из особого писчего материала растительного происхождения. Из математических папирусов одним из древнейших (эпоха Среднего царства) является „Московский“ из коллекции Голенищева, хранящейся в Пушкинском музее искусств. Расшифровкой его занимался русский египтолог проф. Тураев. Задача 10 замечательна тем, что она показывает, как высоко стояли геометрические знания Египта за 2200 лет до нашей эры. К той же эпохе (XII династия) относятся Кахунские папирусы, затем Берлинский „6619“ с задачами на квадратные уравнения. Особенно ценен по богатству материала так называемый папирус Райнда, хранящийся в Британском музее и расшифрованный проф. А. Эйзенлором в 1877 г.

10. По формуле объема усеченной пирамиды

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

будем иметь:

$$V = \frac{6}{3}(16 + 4 + \sqrt{16 \cdot 4}) = 2(16 + 4 + 8) = 56.$$

Любопытно решение египетского математика. Приводим текст папируса, насколько его удалось расшифровать.

„Задача решить пирамиду (сбоку приложен чертеж) как если бы было сказано: 4 внизу, 2 наверху. Делай как делается: квадрат 4 дает 16. Удвоенное 4 дает 8. Делай как делается: квадрат 2 дает 4. Сложи 16, сложи 8, сложи 4, что дает 28. Делай как делается: возьми одну треть от 6, что составит 2. Делай как делается: возьми 28 дважды, что составит 56. Это есть 56. Ты найдешь это правильным“.

11. Если стороны прямоугольника x и y , то задача сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \text{ и } xy = S.$$

Перемножение даст:

$$x^2 = \frac{m}{n} \cdot S.$$

12. Задача сводится к решению системы:

$$x:y = 2:1 \frac{1}{2}; x^2 + y^2 = 400.$$

Египетский математик рассуждает так: пусть первое число есть 2, тогда второе $1 \frac{1}{2}$. Сумма их квадратов $6 \frac{1}{4}$. Корень равен $\frac{5}{2}$. Но корень из 400 есть 20, т. е. в 8 раз больше, следовательно, первое из искомым $= 2 \cdot 8 = 16$, а второе $= 1 \frac{1}{2} \cdot 8 = 12$.

13. Одна часть $= 12$ куб. локтей. Площадь основания 12 кв. локтей. Если отношение сторон $1:\frac{3}{4}$, то измерения прямоугольного основания 4 и 3.

14. Задача сводится к системе уравнений:

$$x:y=1:\frac{3}{4}; x^2+y^2=100.$$

Нетрудно видеть, что $x=8$; $y=6$.

$$\begin{aligned} 15. \frac{2}{2n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+1}:(n+1) = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right):(n+1) = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

$$16. 16\frac{5}{8}, \quad 10\frac{2}{3}, \quad 12, \quad 17\frac{1}{2}.$$

17. Уравнение будет:

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10; \quad x = 9.$$

$$18. x = \frac{3}{10}; x = \frac{15}{53}. \quad 19. 4\frac{1}{6}.$$

$$20. \text{ Так как } \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ то } \pi = 3,16.$$

21. Если основание равнобедренного треугольника b , боковая сторона c , а высота h , то в действительности площадь $S = \frac{bh}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{а египетский способ дает } S_1 &= \frac{bc}{2}, \text{ но } h = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} = \\ &= c\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2}, \text{ следовательно, } S = \frac{bc}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2} = \\ &= S_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Ясно, что $S_1 > S$. При $b=4$, $c=10$ имеем:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2} = 0,98; \text{ т. е. ошибка равна 2 процентам.}$$

22. Если нижнее основание трапеции a , верхнее b , боковая сторона c , высота h , то (см. задачу 21) обычное выражение пло-

щади трапеции будет $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, а по египетскому способу

$$S_1 = \frac{(a+b)c}{2}, \text{ или } S = S_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}. \text{ Дальнейшее ясно.}$$

23. Имеем:

$$2an = 2S + (n-1)dn,$$

$$2an - (n-1)dn = 2S,$$

$$n[2a - (n-1)d] = 2S.$$

24. 315 быков.

25. 7, 49, 343, 2401, 16807, сумма 19607.

26. С первого взято $1\frac{3}{32}$, со второго $1\frac{1}{4}$, с третьего $1\frac{13}{32}$.

27. В сокровищнице было $172\frac{21}{32}$. В папирусе дробная часть представлена в виде суммы кантьем: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$.

28. При $r=5$ и $R=10$ ошибка около $11^0/0$.

Греция

Математика греков достигла своего расцвета к III веку до нашей эры (Александрийский период). От этой эпохи сохранился до нашего времени ряд трактатов по математике (Евклида, Архимеда, Аполлония). Наши сведения о предшествующем периоде основаны преимущественно на сообщениях позднейших авторов, не всегда достоверных. Хотя вплоть до VI века нашей эры продолжают появляться более или менее значительные работы по математике, но ни по содержанию, ни по строгости изложения они не могут сравниться с произведениями Александрийского периода.

Греческие математики довели до большого совершенства логическое построение математики, особенно геометрии. Лишь в XIX веке это логическое построение было поднято на более высокую ступень. Греки довели до высокого совершенства тригонометрию (преимущественно сферическую, развитие которой вызвано было потребностями астрономии). Теоретическая механика (в частности статика, гидростатика, учение о машинах) подверглась разработке строгими математическими методами. Греки достигли больших

успехов в решении задач, ныне относящихся к области высшей математики (интегрального исчисления). Здесь были созданы методы, забытые в позднейшее время и вновь разработанные лишь в XVII веке западно-европейскими математиками.

У греков мы находим также развитое учение о конических сечениях, по фактическому материалу мало отличающееся от современного.

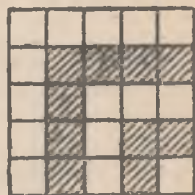
Греки положили начало методам алгебры; однако, хотя в этой области ими был решен ряд трудных проблем, но метода столь же развитого, как в перечисленных выше областях, мы у них не находим.

С именем **Пифагора** (VI век до нашей эры) связан ряд мало-достоверных сообщений. В частности так называемая „теорема Пифагора“ была несомненно известна народам древнего Востока, от которых греки могли заимствовать и ее доказательство.

29. Напишем прогрессию: $\div 1, 3, 5, 7, \dots (2n+1)$, где членами будут нечетные числа. Очевидно, их будет $n+1$. Сумма их найдется по формуле:

$$S = \frac{(1 + 2n + 1)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

В пифагорейской школе это положение доказывалось на частных примерах геометрически. Квадрат из n^2 клеток (на чертеже из 25) можно представить состоящим из клетки 1, к которой последовательно прикладывают „гномоны“ из 3, 5, 7, 9 и т. д. клеток, так что получаем для данного случая:



Черт. 8.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \frac{(1 + 9) \cdot 5}{2} = 25 = 5^2.$$

30. Очевидно, что $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ (легко доказать геометрически).

31. По правилу Пифагора за меньший катет принимаем нечетное число $2n + 1$. Если возвести его в квадрат, вычесть единицу и остаток разделить пополам, получим больший катет:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1, \quad \frac{4n^2 + 4n}{2} = 2n^2 + 2n.$$

Прибавив к полученному результату единицу, найдем гипотенузу $2n^2 + 2n + 1$. Напр., если меньший катет 3, то боль-

ший $\frac{3^2 - 1}{2} = 4$, а гипотенуза $4 + 1 = 5$. Указанное тождество дает:

для $n=1$	соответственно	3, 4, 5
„ $n=2$	„	5, 12, 13
„ $n=3$	„	7, 24, 25
„ $n=4$	„	9, 40, 41
„ $n=5$	„	11, 60, 61.

Платон (429—348 до н. э.), один из основателей идеалистической философии. Как и Пифагору, Платону приписывали ряд математических открытий и создание новых методов доказательства.

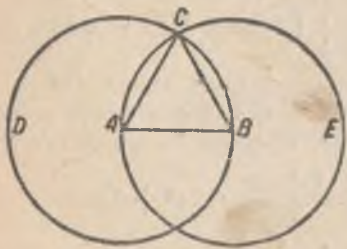
32. Правило Платона легко найти, удвоив числа, которые брал Пифагор.

Для $p=2$	будем иметь	4, 3, 5
„ $p=3$	„	6, 8, 10
„ $p=4$	„	8, 15, 17
„ $p=5$	„	10, 24, 26.

Евклид Александрийский (III в.)—знаменитый геометр древности, давший в своем классическом трактате „Начала“ систематическое изложение основ геометрии. Сочинение это состоит из 13 книг, 14-я и 15-я присоединены позднее. Книги 5, 7, 8, 9 и 10-я содержат арифметику древних. 1, 2, 3, 4 и 6-я посвящены планиметрии, 11, 12 и 13-я — стереометрии. Едва ли есть другая книга по математике, которая пользовалась бы большей известностью и распространением. Она переводилась на все языки и выдержала со времени изобретения книгопечатания до

500 изданий. Кроме „Начал“ Евклид написал „Три книги о поризмах“, небольшой трактат „Данные“ и дошедший до нас в арабском переводе трактат „О делении фигур“.

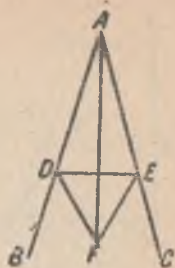
33. Предложение I первой книги. Из точки A как из центра радиусом AB , равным данному отрезку, опишем круг BCD . Из точки B как из центра тем же радиусом опишем круг ACE . Точ-



Черт. 9.

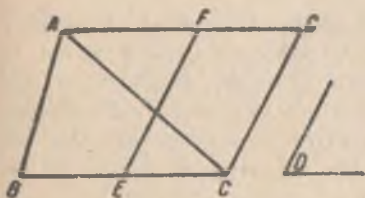
ку C пересечения обоих кругов соединим прямыми с точками A и B . Треугольник ABC — искомый.

34. Дан угол BAC . Возьмем на стороне AB произвольную точку D и отложим на стороне AC отрезок $AE = AD$. Соединив точки D и E , построим на DE равносторонний треугольник DEF . Точку F соединяем с вершиной угла A . Прямая AF делит угол пополам. Доказательство усматривается из чертежа.

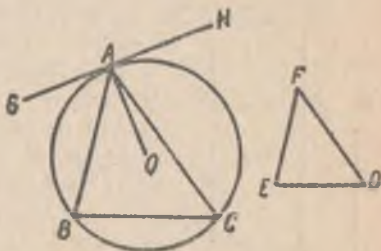


Черт. 10.

35. Дан треугольник ABC и угол D . Делим BC в точке E пополам и строим при точке E угол, равный D . Через C проводим линию $CG \parallel FE$, а через точку A — линию $AG \parallel BC$. Параллелограмм $ECFG$ — искомый.



Черт. 11.



Черт. 12.

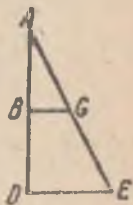
36. На окружности данного круга берем произвольную точку A и проводим в ней касательную GH . Строим $\angle HAC = \angle E$ и $\angle GAB = \angle D$. Точки B и C соединяем. Треугольник ABC — искомый.

37. Пусть AB и AC данные линии, взятые так, что составляют произвольный угол. Продолжим AB так, чтобы $BD = AC$, и через точку D проведем $DE \parallel BC$. Тогда:

по $AB:BD = AC:CE,$

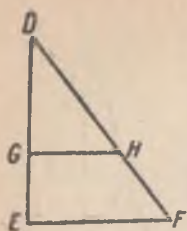
$$BD = AC,$$

следовательно, $AB:AC = AC:CE.$



Черт. 13.

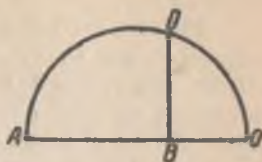
38. Пусть даны отрезки a, b, c . На стороне произвольного угла отложим $DG = a$ и от точки G отрезок $GE = b$, а на



Черт. 14.

другой стороне угла — отрезок $DH = c$. Соединим точки G и H и проведем через точку E линию EF параллельно GH . Отрезок HF — иско-
мый.

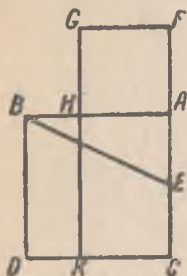
39. Отложим на пря-
мой один за другим от-
резки AB и BC , равные
данным. На AC как на
диамetre опишем полу-
круг. Из точки B восста-



Черт. 15.

вим перпендикуляр до встречи с окружностью в точке D . Ли-
ния BD — искомая.

40. Предложение XI книги второй гласит: разделить прямую
 AB в точке H на такие две части, чтобы прямоугольник, за-
ключенный между целой прямой AB и одной
из ее частей, был равен квадрату, построенному
на другой ее части.



Черт. 16.

Построение Евклида. Построим на прямой
 AB квадрат $ABCD$, разделим AC в точке E
пополам и соединим B с E . Продолжим AC
до точки F так, чтобы $BE = FE$. Построим
на AF квадрат $AFGH$ и продолжим GH до
встречи с DC в точке K . Прямая AB и будет
разделена так, что

$$\square AH = AB \cdot BH.$$

Действительно: назовем $HA = x$ и $AB = a$, тогда $BH = a - x$;
так как $AE = \frac{a}{2}$, то $FE = x + \frac{a}{2} = BE$, но $BE^2 = AB^2 + AE^2$,
или

$$x^2 + \frac{a^2}{4} + ax = a^2 + \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$x^2 = a^2 - ax = a(a - x).$$

У Евклида доказательство дается из других соображений.

41. Известно, что равнобедренный треугольник, основанием
которого служит сторона вписанного в круг правильного
десятиугольника, а боковая сторона есть радиус этого круга,

имеет центральный угол в 36° , а углы при основании вдвое большие. Евклид строит такой треугольник, а потом в данный круг вписывает треугольник ACD , равноугольный уже построенному (см. задачу 36). Делим углы ADC и ACD пополам. Проводим CE и BD до встречи с окружностью в точках B и E . Соединяя A с B , B с C , A с E , D с E , получим искомый пятиугольник.



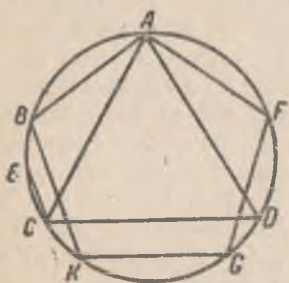
Черт. 17.

42. Впишем в данный круг равносторонний треугольник ADC и равносторонний пятиугольник $ABKGF$. Разделим дугу BC в точке E пополам и соединим точки C и E . Прямая EC будет стороной искомого пятнадцатиугольника. Действительно: дуга

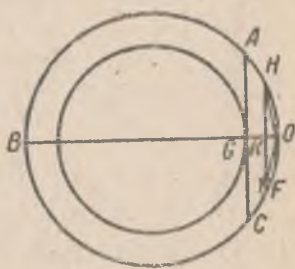
$BA = \frac{1}{5}$ всей окружности, дуга $ABC = \frac{1}{3}$ ее, следовательно,

дуга $BC = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ окружности, а дуга $EC = \frac{1}{2}$ дуги

$BC = \frac{1}{15}$ окружности.



Черт. 18.



Черт. 19.

43. Предложение XVI книги двенадцатой. Проведем диаметр BD и в точке G пересечения с меньшей из окружностей проведем касательную AC . Разделим пополам полуокружность BAD и будем продолжать это деление, пока не дойдем до такой части HD , которая меньше AD . Опустим из точки H перпендикуляр HK на диаметр, продолжим до точки F . Так как $HF \parallel AC$, а последняя касается круга, то HF не будет его

касаться, тем более не будут его касаться HD и DF . HD будет сторона искомого многоугольника.

44. Предложение X книги тринадцатой. Евклид геометрически доказывает, что $a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$; но $a_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$,

$a_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$ и $a_6 = R$, где R — радиус описанного круга.

Следовательно, имеем:

$$\frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 + R^2 = \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + R^2.$$

Сокращая на R^2 , получим:

$$\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + 1 = \frac{6 - 2\sqrt{5} + 4}{4}.$$

45. Эта задача находится в арабской рукописи, найденной ориенталистом математиком Бёнке в Парижской библиотеке.

В ней Евклид назван автором трактата „О делении фигур“. Комментатор Евклида Прокл упоминает об этом сочинении, но до второй половины XVI века этот трактат был неизвестен. В 1563 г. Д. Ди случайно нашёл на арабскую рукопись того же заглавия, хотя имя Евклида в ней не упоминается.

Проведем хорду BC . Из середины D восставим перпендикуляр DE до встречи с окружностью. Соединим A и D . Ломаная ADE , очевидно, делит площадь $ABEC$ пополам. Проведем $FD \parallel AE$ и соединим F с E . Прямая FE разделит данную площадь пополам.

Архимед из Сиракуз (287 — 212 до н. э.) — гениальный физик и математик древности, ряд сочинений которого дошел до нас. У Архимеда мы находим замечательные трактаты механического содержания („О равновесии плоских фигур“, где дана теория рычага и вычисляются центры тяжести ряда фигур; „О плавающих телах“, где доказан закон, называемый и поныне „законом Архимеда“. Этот закон затем применяется к исследованию условия равновесия тел, плавающих в жидкости). Архимед дал строго изложенный метод вычисления числа π и показал, что оно заклю-

чено между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{10}{70}$ („Измерение круга“). В сочинении „Псаммит“ (Исчисление песчинок), Архимед дает метод определения междупланетных расстояний, совершенно безукоризненный по идее. В этом же сочинении он предлагает десятичную систему нумерации (греки пользовались очень несовершенной системой нумерации). В ряде работ Архимед решает задачи, принадлежащие к интегральному исчислению. Стремясь к логической безупречности рассуждения, он ведет доказательства довольно тяжелым способом. Но в одной из работ („Послание к Эратосфену“) Архимед рассказывает о своем методе решения этих задач, который по существу является методом интегрального исчисления.

46. Так как $\lim S = \frac{a}{1-q}$, то при $a=1$ и $q=\frac{1}{4}$ имеем $\lim S = \frac{4}{3}$. Интересно доказательство самого Архимеда: надо найти сумму членов бесконечно убывающей прогрессии $a + b + c + d + \dots$, если знаменатель $= \frac{1}{4}$. Имеем:

$$\begin{aligned} (b + c + d + \dots) + \left(\frac{b}{3} + \frac{c}{3} + \frac{d}{3} + \dots\right) &= \left(b + \frac{b}{3}\right) + \\ + \left(c + \frac{c}{3}\right) + \left(d + \frac{d}{3}\right) + \dots &= \frac{4}{3}b + \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}d + \dots = \\ = \frac{1}{3} (4b + 4c + 4d + \dots) &= \frac{1}{3} (a + b + c + d + \dots), \end{aligned}$$

отсюда

$$b + c + d + \dots = \frac{1}{3}a$$

и

$$a + b + c + d + \dots = \frac{4}{3}a.$$

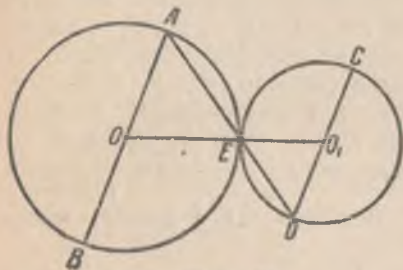
47. Известно, что поверхность сегмента равна $2\pi R \cdot H$, где R — радиус шара, H — высота. Если b — прямая, соединяющая вершину сегмента с окружностью основания, то $b^2 = 2RH$, следовательно, $S = \pi b^2$.

48. Объем цилиндра:

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{3}{2} V_{\text{ш}}.$$

Поверхность цилиндра (полная) $S_{\text{ц}} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 =$

$$= 6\pi R^2 = \frac{3}{2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{3}{2} S_{\text{ш}}.$$



Черт. 21.

49. Пусть $AB \parallel CD$. Проведем линию центров OO_1 и соединим точку E с точками A и D . Тогда $\angle AOE = \angle DO_1E$ и треугольники AOE и DO_1E — равнобедренные, следовательно, $\angle AEO = \angle DEO_1$. Но OO_1 — прямая, следовательно, ED есть продолжение AE .

50. Назовем площадь арбелона S . Легко видеть, что

$$S = \frac{\pi}{8} [AC^2 - (AD^2 + CD^2)],$$

но $AC = AD + CD$, следовательно, $S = \frac{\pi \cdot AD \cdot CD}{4}$; так как

$$AD \cdot DC = BD^2, \text{ то } S = \pi \cdot \frac{BD^2}{4}.$$

51. Если сторону квадрата обозначить через $2a$, то радиус вписанного круга a , радиус же описанного $a\sqrt{2}$; площадь вписанного круга πa^2 , а описанного $2\pi a^2$.

52. Проведем диаметр $MN \parallel CD$. Ясно, что $\angle 1 = \angle 2$; следовательно, $\triangle AOH = \triangle BOK$, т. е. $HO = OK$. Опустим из центра на хорду CD перпендикуляр OL . Тогда $DL = LC$. Но $EL = HO$ и $LF = OK$, следовательно, $EL = LF$, откуда $DE = CF$.

53. Решение Архимеда. Проведем диаметр AF и хорды AC , AD , CF и BD . Так как $\angle AED$ прямой, то он равен $\angle ACF$. Но $\angle ADC =$

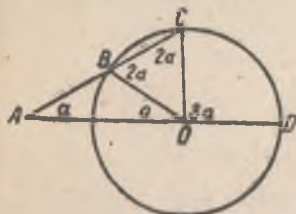


Черт. 22.

$= \angle AFC$, следовательно, в треугольниках ADE и AFC $\angle CAF = \angle DAE$. Поэтому дуга CF равна дуге BD , а следовательно, $CF = BD$. Но $DE^2 + BE^2 = CF^2$ (1), $AE^2 + CE^2 = AC^2$ (2) и $AC^2 + CF^2 = AF^2$. Подставляя значения CF^2 и AC^2 из (1) и (2) в последнее равенство, будем иметь:

$$DE^2 + BE^2 + AE^2 + CE^2 = AF^2.$$

54. $\angle BOA = \angle BAO = a$, если $AB = r$. Но $\angle CBO = 2a$ как внешний по отношению к треугольнику AOB . Треугольник BOC равнобедренный, следовательно, $\angle BCO = 2a$. Но $\angle COD$ — внешний по отношению к треугольнику AOC , следовательно, $\angle COD = \angle CAO + \angle ACO = a + 2a = 3a$.



Черт. 24.

55. Объем конуса $\frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$; если радиус шара R , то $r^2 h = 4R^3$, и, следовательно,

$$R = \sqrt[3]{\frac{r^2 h}{4}}.$$

Объем цилиндра $\pi r^2 h$. Следовательно, $R_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{4} r^2 h}$.

$$56. V_{\text{сегм}} = V_{\text{сект}} - V_{\text{конуса}},$$

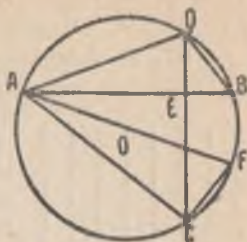
$$V_{\text{сегм}} = \frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{\pi r^2}{3} (R - h) = \pi r^2 \left(h - \frac{R}{3} \right).$$

Пусть отношение равно 2:

$$\frac{\pi r^2 \left(h - \frac{R}{3} \right)}{\left(\frac{\pi r^2 h}{3} \right)} = 2.$$

Тогда

$$\frac{3h - R}{h} = 2 \text{ и } h = R.$$



Черт. 23.



Черт. 25.

Если отношение есть n , то $3h - R = hn$ и $R = h(3 - n)$, следовательно, n должно быть меньше 3.

57. У Архимеда эта задача решена в следующей форме. „Если взяты линии в каком угодно количестве и каждая превос-



Черт. 26.

ходит следующую на избыток, равный меньшей из всех, и если взяты в том же числе, как первые, другие линии, из которых каждая равна большей из линий первого ряда, то сумма всех квадратов на линиях, равных большей, сложенная с квадратом на большей и сложенная с площадью, заключенной между меньшей из линий и линией, составленной из всех неравных линий, равна утроенной сумме квадратов, построенных на неравных линиях“. В современных обозначениях это

предложение может быть записано следующим образом: приняв за единицу длины длину меньшей из всех прямых, мы получим тождество:

$$n \cdot n^2 + n^2 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Это тождество легко привести к такому виду, который дает ответ на формулированный в зад. 57 вопрос. Именно, суммируя арифметическую прогрессию $1 + 2 + 3 + \dots + n$, мы получим:

$$n^2(n + 1) + \frac{n(n + 1)}{2} = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2),$$

откуда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Это тождество можно получить непосредственно, напр., используя тождество:

$$n^3 - (n - 1)^3 = 3n^2 - 3n + 1.$$

Давая n значения $1, 2, 3, \dots, n$, получим:

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1,$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1,$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1,$$

$$n^3 - (n - 1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1.$$

Сложение даст:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n.$$

Обозначив искомую сумму квадратов чисел через S_n , получим:

$$n^3 = 3S_n - \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Определяя S_n и упрощая, найдем:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Герон Александрийский (II век до н. эры); в его книге „Диоптра“ впервые приводится известная из курса геометрии формула для выражения площади треугольника, если даны его стороны:

$$\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}.$$

Герон дает сложное, но своеобразное доказательство этой формулы.

58. Ответ: 84; 30 (второй треугольник — прямоугольный).

Гипсикл Александрийский (150 л. до н. эры), геометр, которому принадлежит XIV книга „Начал“ Евклида (о свойствах правильных многогранников). Задача 59 находится в сочинении „Анафорикос“.

59. Решение. Имеем арифметическую прогрессию из четного числа $(2n)$ членов: $\div a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$.

Сумма членов первой половины

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n.$$

Сумма членов второй половины

$$S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} n,$$

но $a_n = a_1 + dn - d$; $a_{n+1} = a_1 + dn$; $a_{2n} = a_1 + 2dn - d$,
поэтому

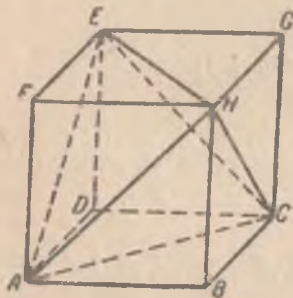
$$S_2 = (2a_1 + 3dn - d) \frac{n}{2}$$

и

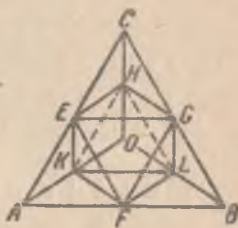
$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2} [2a_1 + 3dn - d - 2a_1 - dn + d] = \frac{n}{2} \cdot 2dn = d \cdot n^2.$$

Дамасций (VI век). Ему приписывают составление XV книги „Начал“ Евклида.

60. Решение. Проведем во всех шести квадратах диагонали AC , AE , CE , $АН$, $ЕН$, $СН$, тогда треугольники $АЕС$, $АНЕ$, $АНС$, $СНЕ$ — равносторонние. Следовательно, $АЕНС$ есть тетраэдр, вписанный в куб, так как его вершины суть вершины куба.



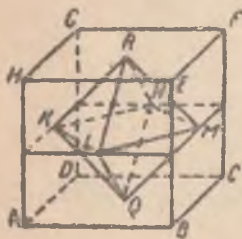
Черт. 27.



Черт. 28.

61. Разделим ребра тетраэдра пополам в точках E, F, G, H, K, L и соединим эти точки между собою двенадцатью прямыми FE, FK, FG, FL и т. д., которые, очевидно, равны друг другу. Все восемь треугольников, основания которых FG, GH, HK, KF , а вершины находятся в E и L — равносторонние. Следовательно, тело EL есть октаэдр, вписанный в тетраэдр, так как его вершины лежат на серединах ребер тетраэдра.

62. Возьмем середины квадратов K, L, M, N, Q, R и соединим эти точки двенадцатью прямыми KL, LM, KM, QM , и т. д., тогда тело RQ будет октаэдр. Все восемь треугольников, основания которых KL, LM, MN, NK и вершины коих R, Q , равносторонние. А потому тело RQ есть октаэдр, вписанный в куб, так как его вершины лежат в центрах граней куба.



Черт. 29.

Никомах из Геразы (I век). Его трактат „Введение в арифметику“ представляет первое из дошедших до нас руководств по арифметике, которое в свое

время служило учебником и образцом аналогичных трактатов в позднейшие эпохи в Зап. Европе.

63. Решение.

$$1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + \dots$$

Сразу видно при разбивании на группы, что

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 8 &= 2^3 \\ 27 &= 3^3 \\ 64 &= 4^3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Общее доказательство: до первого числа n -й группы берется

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

нечетных чисел.

$\frac{n(n-1)}{2}$ -ое нечетное число равно $n(n-1) - 1$, следовательно, первое число n -й группы будет $n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$.

В n -й группе n чисел; n -е число этой группы равно

$$n^2 - n + 1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1,$$

следовательно, сумма членов n -й группы равна

$$\frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)}{2} n = n^3.$$

Диофант Александрийский (II — III век нашей эры), знаменитый греческий математик. Из 13 книг его трактата „Арифметика“ до нас дошло только шесть. Он первый из греков ввел некоторые сокращенные обозначения — шаг к символической записи математической мысли. Методы решения задач у Диофанта крайне остроумны и своеобразны, но общих приемов нет. Он занимается преимущественно алгеброй и арифметикой, чем отличается от предшествовавших ему ученых, главным образом работавших над геометрией.

64. Решение Диофанта. Положим, что меньшая часть от второго деления есть x . Тогда большая часть от первого деления будет $2x$. Меньшая часть от первого деления $100 - 2x$, а большая часть от второго деления $300 - 6x$. Обе части от второго деления должны составлять 100, следовательно, $300 - 5x = 100$, откуда $x = 40$.

65. Решение Диофанта. Пусть $2n$ — разность обоих чисел. Тогда большее $10 + n$, меньшее $10 - n$. Произведение $100 - n^2 = 96$; $n^2 = 4$ и $n = 2$. Искомые числа 12 и 8.

66. Решение Диофанта.

$$\frac{x+y}{2} = 5.$$

Пусть

$$\frac{x-y}{2} = d.$$

Сложение даст $x = 5 + d$, вычитание $y = 5 - d$; $(5 + d)^2 + (5 - d)^2 = 68$; $50 + 2d^2 = 68$; $2d^2 = 18$; $d = 3$; $x = 8$; $y = 2$.

Обычное решение:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 2xy = 100 \\ x^2 + y^2 = 68 \\ \hline 2xy = 32 \end{array}$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 36; x - y = 6.$$

Затем комбинируем с $x + y = 10$.

67. Задача сводится к решению системы:

$$x - y = \frac{1}{3} z; y - z = \frac{1}{3} x; z - 10 = \frac{1}{3} y;$$

откуда $x = 45; y = 37\frac{1}{2}; z = 22\frac{1}{2}.$

$$68. \frac{x}{y} = 3; \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5.$$

Возводя почленно в квадрат обе части первого уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{y^2} = 9 \text{ и } \frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10.$$

Сравнение со вторым уравнением дает:

$$\begin{aligned} 10y^2 &= 5(x + y), \\ 2y^2 &= x + y, \end{aligned}$$

но $x = 3y$, следовательно, $2y^2 = 4y$; $y = 2$; $x = 6$.

69. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{aligned}(x+y)z &= 35, \\ (x+z)y &= 27, \\ (y+z)x &= 32,\end{aligned}$$

откуда

$$x=4; y=3; z=5.$$

70. Получаем систему:

$$\begin{aligned}xy+x+y &= 8, \\ yz+y+z &= 15, \\ xz+x+z &= 24, \\ x &= \frac{11}{4}; y = \frac{7}{5}; z = \frac{17}{3}.\end{aligned}$$

71. Имеем уравнения:

$$5x+8y=n^2; n^2+60=m^2; m=x+y,$$

где x и y — числа мер вина обоих сортов.

$$60=m^2-n^2=(m+n)(m-n).$$

Можно положить:

$$m+n=20; m-n=3,$$

тогда

$$m=11\frac{1}{2}; n=8\frac{1}{2}; y=4\frac{11}{12}; x=6\frac{7}{12}.$$

72. Решение Диофанта. Пусть первое число $8x$. Тогда, приняв второе равным x^2-1 , мы выполним одно из требований, так как произведение этих чисел $8x^3-8x$, сложенное с $8x$, составит $8x^3$, т. е. куб некоторого числа. Необходимо, чтобы это же произведение, сложенное со вторым числом, составило куб некоторого числа, т. е. чтобы $8x^3+x^2-8x-1$ было кубом. Полагая, что это выражение равно $(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1$, и решив уравнение, найдем:

$$x=\frac{14}{13}.$$

Следовательно:

$$\text{первое число } 8 \cdot \frac{14}{13} = \frac{112}{13}, \text{ а второе } \left(\frac{14}{13}\right)^3 - 1 = \frac{27}{169}.$$

Во втором условии Диофант выбирает число так, что в получаемом кубичном уравнении уничтожаются члены с кубами неизвестного в обеих частях уравнения.

73. Решение Диофанта. Пусть сумма всех трех чисел будет $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

Пусть $I + II = x^2$, тогда $III = 2x + 1$.

Пусть $II + III = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, тогда I найдется вычитанием из общей суммы $x^2 + 2x + 1$ суммы $II + III$, равной $x^2 - 2x + 1$. Получим $I = 4x$. Следовательно, $II = x^2 - 4x$. Теперь $I + III = 6x + 1$ должно быть квадратом. Пусть $6x + 1 = 121$, тогда $x = 20$, $I = 80$; $II = 320$; $III = 41$.

74. Решение Диофанта. Пусть гипотенуза есть $x^3 + x$, а катет $x^3 - x$.

Тогда второй катет будет:

$$\sqrt{(x^3 + x)^2 - (x^3 - x)^2} = 2x^2,$$

но $2x^2 = x^3$, следовательно, $x = 2$, гипотенуза 10, первый катет 6, второй 8.

Ямвлих (IV век) — один из комментаторов Никомаха.

75. Решение. Вычитая почленно из 1-го уравнения 2-е, имеем:

$$y - z = 2z + 2u - 3y - 3u, \text{ или } 4y - 3z = -u.$$

Вычитаем из 1-го уравнения 3-е: $y - u = 2z + 2u - 4y - 4z$, или $5y + 2z = 3u$. Теперь имеем систему:

$$\begin{aligned} 4y + u &= 3z \\ 5y - 3u &= -2z. \end{aligned}$$

Уравнивая коэффициенты при z , найдем $23y - 7u = 0$, откуда $u = \frac{23}{7}y$; если $y = 7$, то $u = 23$ и $z = 17$. Из 1-го уравнения $x = 73$.

76. Прием, аналогичный приему предыдущей задачи.

$$x = 229; y = 149; z = 131; u = 121.$$

Метродор (время жизни неизвестно) — автор задач в стихах (гекзаметр), вошедших в рукописные сборники, имевшие большое распространение.

77. Задача сводится к составлению уравнения:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

откуда $x = 84$.

78. Золото и медь составляют 40 мин, золото и олово 45, золото и железо 36. Если сложить, то тройное количество золота, олово, медь и железо составят 121 мину. Следовательно, двойное количество золота равно 61 мине, и ординарное 30,5 мины. Тогда легко найти, что меди было 9,5 мины, олова 14,5 мины, железа 5,5 мины.

Греческая Антология — „Anthologia Graeca“ — арифметический сборник, содержащий 48 задач, условия которых написаны в стихотворной форме. В X — XIV веках они были в большом ходу и служат прототипом „Recréations mathématiques“.

79. Составляем уравнение:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x.$$

откуда $x = 28$. Можно решать, как и следующие задачи, арифметически.

80. Система уравнений:

$$x + \frac{1}{3}z = y, \quad (1)$$

$$y + \frac{1}{3}x = z, \quad (2)$$

$$z - x = 10, \quad (3)$$

Из (1) и (2): $2x = z$, следовательно, из (3) $x = 10$; $z = 20$;
 $y = 16\frac{2}{3}$.

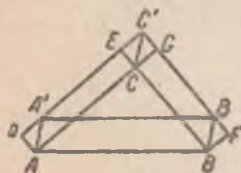
81. Ответ: в $\frac{12}{25}$ дня. 82. Число, кратное 12.

83. У мула 7 мешков, у ослицы 5. 84. $5\frac{1}{7}$ дня.

85. В $\frac{6}{23}$ дня. 86. У Эрота было 3360 плодов.

Папп Александрийский (300 — 370) — автор ценного трактата „Математический сборник“ в восьми книгах. Первые две утрачены. Благодаря этому сочинению мы получаем возможность составить представление о ряде математических работ греческих авторов, непосредственно до нас не дошедших. Папп не только превосходный комментатор, хорошо изучивший авторов, но и последний великий греческий математик.

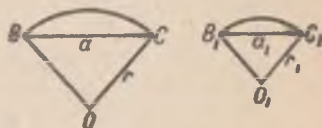
87. Ясно, что $\triangle A'C'B' = \triangle ABC$ (данному); параллелограммы $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равновелики данным параллелограммам $ADEC$ и $BFGC$, так как их высоты и основания соответственно равны. Если от фигуры $AA'C'B'B$ отнять треугольник $A'C'B'$, то останется параллелограмм $AA'B'B$. Если отнять треугольник ABC , равный треугольнику $A'B'C'$, то останется сумма параллелограммов $AA'CC'$ и $BB'CC'$ или равновеликая ей сумма параллелограммов $ADEC$ и $BFGC$. Очевидно, это предложение есть обобщение теоремы Пифагора.



Черт. 30.

88. Пусть площади секторов k и k_1 , сегментов S и S_1 , треугольников OBC и $O_1B_1C_1$ — соответственно Δ и Δ_1 , радиусы кругов r и r_1 , основания сегментов a и a_1 .

Треугольники подобны, поэтому $\Delta:\Delta_1 = a^2:a_1^2 = r^2:r_1^2$, но $k:k_1 = r^2:r_1^2$, следовательно, $\Delta:\Delta_1 = k:k_1$, или $k:\Delta = k_1:\Delta_1$ (1). Так как $S = k - \Delta$ и $S_1 = k_1 - \Delta_1$, то



Черт. 31.

$$S:S_1 = k - \Delta : k_1 - \Delta_1;$$

но из пропорции (1) имеем:

$$\frac{k - \Delta}{\Delta} = \frac{k_1 - \Delta_1}{\Delta_1},$$

или

$$\frac{k - \Delta}{k_1 - \Delta_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{a^2}{a_1^2},$$

следовательно, $S:S_1 = a^2:a_1^2$.

о свойствах чисел, не имеющих, впрочем, самостоятельного значения.

90. Решение Эпафродита. $\frac{120}{5} = 24$ и $\frac{70}{5} = 14$, следовательно, по основанию участка рассажено 25, а по высоте 15, а всего $25 \cdot 15 = 375$ деревьев. Частные 24 и 14 выражают число промежутков, следовательно, деревьев в каждом ряду на одно больше. Вообще, если измерения участка a и b , а промежуток равен d , то число деревьев на участке:

$$N = \left(\frac{a}{d} + 1 \right) \left(\frac{b}{d} + 1 \right).$$

91. Надо показать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Эпафродит основывается на задаче Никомaha (задача 63). Так как куб числа n выражается суммой последовательных нечетных чисел, из которых последнее будет $n^2 + n - 1$, то

$$1 + 3 + 5 + \dots + (n^2 + n - 1) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3,$$

но левая часть этого равенства есть арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$ и число членов равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

Следовательно, сумма равна: /

$$\frac{1 + n^2 + n - 1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Обычно вычисляют сумму кубов, основываясь на тождестве: $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$. Изменяя последовательно значение n , начиная с единицы, получим ряд тождеств, аналогичных тем, которые получаются при суммировании квадратов (см. задачу 57). Сложение их даст:

$$n^4 = 4S - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n,$$

откуда по упрощении

$$S = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Витрувий Руф — римский геометр.

92. Решение: $AB = AE + R$; $AE = AD$,

$$BC = FC + R; FC = DC,$$

следовательно,

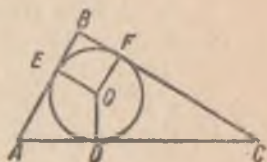
$$AB + BC = 2R + AC,$$

откуда

$$2R = AB + BC - AC.$$

В данном случае

$$2R = 9 + 12 - 15 = 6.$$



Черт. 33.

Эрфуртский кодекс — рукопись позднего происхождения (может быть, XI века), представляющая собрание отрывков, иногда более полных, чем Арцерианский кодекс: в нем имеется ряд стереометрических задач, которые отсутствуют в древних списках.

Марк Юний Нипсус (жил не позже II века). Римский писатель-геометр.

93. Если $\frac{D_0 + D_1 + D_2}{3} = D$, то $\frac{11}{14} D^2 H$ выражает объем

цилиндра, который определяется формулой $\frac{\pi D^2 H}{4}$, следовательно,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{11}{14}, \text{ откуда } \pi = \frac{22}{7}.$$

94. Решение Нипсуса. Мы укажем ход его вычислений, пользуясь современными обозначениями. Пусть b и c — катеты, Δ — площадь и a — данная гипотенуза. Имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$4\Delta = 2bc.$$

Сложение и вычитание дают:

$$a^2 + 4\Delta = (b + c)^2$$

$$a^2 - 4\Delta = (b - c)^2,$$

откуда

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4\Delta}$$

$$b - c = \sqrt{a^2 - 4\Delta}.$$

Сложение приводит к

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + 4\Delta} + \sqrt{a^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Затем Нипсус вычисляет c не вычитанием, как сделали бы мы, а по формуле

$$c = b - (b - c),$$

зная b и $b - c$.

При данных числовых значениях

$$b + c = \sqrt{1225} = 35$$

$$b - c = \sqrt{25} = 5,$$

откуда $b = 20$, $c = 15$.

95. Решение Нипсуса

$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24.$$

Проще было бы, конечно, взять половину произведения катетов.

Юний Модерат Колумелла (I век) в своем сочинении „О сельском хозяйстве“, касаясь землемерия, указывает земельные меры и решение девяти геометрических задач с числовыми данными.

96. Если a — сторона правильного треугольника, то его площадь $\Delta = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$. Если приравнять это выражению, данному Колумеллой, то получим, что $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$, или $3 = 3\frac{1}{225} = 3,00(4)$.

Погрешность $\frac{4}{27}\%$.

Шартрская рукопись (на пергаменте, хранится в библиотеке города Шартра) XI века, содержит ряд отрывков из сочинений римских землемеров.

97. По формуле Герона площадь треугольника равна 84. С другой стороны, она равна $\frac{15 \cdot h}{2}$, где h — искомая высота. Следовательно, $h = 11\frac{1}{5}$.

Китай

Китайские летописцы относят начало истории своей страны к 2637 году до н. э., ко времени третьего по счету императора Хоанг-Ти. Однако, первые следы развития культуры Китая заходят не далее 1500 лет, а точные исторические сведения начинаются с 841 г. до н. э. К числу важнейших изобретений в области математики относится китайская счетная доска для быстрого счисления и мгновенного выполнения четырех арифметических действий с большими цифрами, вплоть до одиннадцатизначных. В XVIII веке это изобретение проникло в Россию в измененном виде конторских счетов. Математические знания китайцев изложены в энциклопедии, носящей название — „Лей-шу сан-тцай Ту-гуй“ в 120 книгах. Большое издание этой энциклопедии в XVIII веке заключало в себе 78 тысяч таблиц, отпечатанных с резных досок. Теоретической разработки проблем математики и механики в китайской литературе не встречается.

Сами китайцы считают свою культуру весьма древней; основываясь на свидетельствах своих летописцев, они склонны думать, что культура эта создавалась вне всяких иноземных влияний. Подобная уверенность объясняется тем, что все заимствованное в глубокой древности из Вавилона, а позднее из Индии и от арабов в области математики в китайской переработке, действительно, утрачивало почти всякое сходство с первоисточником. В дошедших до нас памятниках их математической литературы оригинальна именно внешняя сторона, форма, но не содержание. Единственная область, в которой проявилась их самостоятельность, это — неопределенный анализ. С XIII века начинает сказываться влияние европейцев.

Трактат „Киу-Чанг“ („Девять отделов искусства счета“). Если верить летописям, то это древнейший китайский математический трактат, начало составления которого положено за 2637 лет до н. э. Он содержит ряд вопросов по землеизмерению, метрологии, измерению объемов, действия со степенями и корнями, задачи арифметические, на уравнения и геометрические, главным образом с применением теоремы Пифагора.

98. Если бы в клетке были только фазаны, то число ног было бы 70, а не 94. Следовательно, 24 ноги лишних принадлежат кроликам по 2 на каждого. Ясно, что кроликов было 12 и, следовательно, фазанов 23.

99. 7 купнов, 53 каша.

100. Составляем систему уравнений:

$$5x + 2y = 10; 2x + 8y = 8.$$

Вол стоит $1\frac{7}{9}$ таэла, баран $\frac{5}{9}$ таэла.

Трактат „Девять отделов искусства счета“ представляет комментарий, написанный в середине XIII века, к более древнему трактату (начало VIII века) „Таен лии-шу“.

101. Из условий задачи следует, что

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1,$$

где x — число раз отсыпания риса лопатой,

y — „ „ „ „ башмаком,

z — „ „ „ „ миской.

Так как $19x = 12z$, то $x = \frac{12z}{19}$; x , y и z — обязательно чис-

ла целые. Следовательно, можно положить, что $z = 19u$. Отсюда получаем неопределенное уравнение с двумя неизвестными $17y + 13 = 228u$. Наименьшее значение u , при котором y будет целым, есть $u = 14$; $x = 168$; $y = 187$; $z = 266$.

1-й похитил 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го

2-й „ 3 ши 1 тау 7 шингов 9 го

3-й „ 3 ши 1 тау 9 шингов 2 го.

В каждой бочке было рису 3 ши 1 тау 9 шингов 3 го.

Трактат „Начала искусства вычисления“ напечатан в 1593 г. Содержит ряд статей и задач по арифметике, геометрии и алгебре, причем много вопросов заимствовано из „Киу-Чанг“.

102. Имеем систему: $3x + 2 = 5y + 3 = 7z + 2$, отсюда $3x = 7z$ и $x = \frac{7z}{3}$. Наименьшее значение $z = 3$, тогда $x = 7$ и $y = 4$. Искомое число есть 23; следующее возможное значение 128 и т. д.

103. Глубина озера 12 фут.

104. Надломленная часть $5\frac{9}{20}$ фута.

105. Пусть a , b , c — стороны, p — периметр, Δ — площадь. Тогда $p = a + b + c$; $c^2 = a^2 + b^2$ и $ab = 2\Delta$.

Из 2-го и 3-го равенств $(a+b)^2 = 4\Delta + c^2$, $(p-c)^2 = 4\Delta + c^2$, откуда

$$c = \frac{p^2 - 4\Delta}{2p}.$$

Зная c , имеем $a+b = p-c$ и $ab = 2\Delta$. Значения a и b определяем как корни квадратного уравнения.

106. Если a и b — стороны прямоугольника, периметр $2p$, площадь S , то $ab = S$ и $a+b = p$, откуда найдем a и b как корни квадратного уравнения.

107. Центр круга — в пересечении биссектрис двух углов треугольника.

Трактат „Чеу-пей“ — один из древнейших (около 1100 лет до н. э.), написан в разговорной форме и касается свойств прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5.

108. Тожество $2(a^2+b^2) - (a-b)^2 = (a+b)^2$ почти очевидно. Китайцы доказывали его геометрически. Возьмем квадрат $ABCD$ из 49 клеток (черт. 34.). Тогда очевидно, что

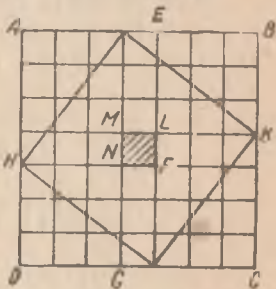
$$AEFH + KCGM + HNGD + \\ + BKLE - MLNF = ABCD,$$

или

$$2AEFH + 2HNDG - MLNF = ABCD$$

$$2(4^2 + 3^2) - (4-3)^2 = (4+3)^2.$$

109. 16 фунтов второй смеси стоят 56 дяо. Если первой смеси взять вчетверо больше, то она будет стоить 108 дяо, причем в ней будет число фунтов 1-го сорта то же, что и во второй смеси, а число фунтов 2-го сорта — на 20 больше. Так как при этом стоимость больше на 52 дяо, то фунт 2-го сорта стоит 2,6 дяо, легко видеть, что фунт 1-го сорта стоит 3,8 дяо.



Черт. 34.

$$110. \frac{c+b+a}{abc} \cdot \frac{ab}{(a+b+c)(a-b-c)} = \frac{1}{c(a-b-c)}.$$

Индусы

Древнейшие из дошедших до нас математических сочинений индусов относятся к III—IV векам нашей эры. У старинных индусских авторов мы находим сведения преимущественно из об-

ласти арифметики и алгебры. Работы индусов в этой области оказали большое влияние не только на ближайших соседей индусов, но через посредство арабов — и на европейцев.

Арифметика из Бахшали. Рукопись на березовой коре без имени автора, найденная при раскопках в северо-западной Индии. Она представляет неполную копию, сделанную в VII или VIII веке с более древнего памятника (III или IV века). Некоторые задачи своими условиями напоминают задачи Диофанта.

111. Анонимный автор решает задачу по правилу так называемого „ложного положения“. Если бы первый дал 1, второму пришлось бы дать 2, третьему 6, четвертому 24, а всем вместе 33. Но они дали 132, т. е. вчетверо больше, следовательно, и каждый дал вчетверо больше: первый 4, второй 8, третий 24 и четвертый 96.

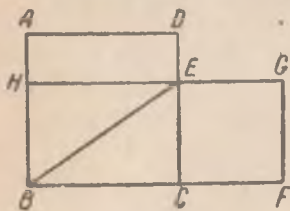
112. В конце второго дня.

113. По условию имеем: $N + 5 = u^2$ и $N - 11 = v^2$, откуда $16 = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$, следовательно, получаются две комбинации:

$$\text{I) } \left. \begin{array}{l} u + v = 8 \\ u - v = 2 \end{array} \right\} u = 5; v = 3 \text{ и } N = 20,$$

$$\text{II) } \left. \begin{array}{l} u + v = 16 \\ u - v = 1 \end{array} \right\} u = \frac{17}{2}; v = \frac{15}{2} \text{ и } N = 67 \frac{1}{4}.$$

„Сулва-сутра“, или „Правила веревки“ — сборники правил, касающихся постройки жертвенников, их формы, размеров и ориентации. В настоящее время известно 3 таких сборника. Авторы их — Бодгайана (VI или VII век до н. э.), Катияяна и Апастамба (IV или V век).

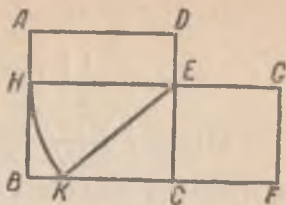


Черт. 35.

114. Правило Апастамбы: „Отрезать стороной EC меньшего квадрата ECFG часть большего (ABCD), т. е. прямоугольник HBCE. Диагональ его BE дает столько же,

сколько дают его измерения, т. е. стороны данных квадратов“ (черт. 35). В этих словах мы видим формулировку теоремы Пифагора. Квадрат, построенный на BE, будет равен сумме данных квадратов.

115. Второе правило Апа-
стамбы: „Отрезать стороной EC
отнимаемого квадрата часть (прямо-
угольник $HBCE$) от большего и про-
вести большую из сторон HE отре-
занной части до встречи с другой
стороной BC . Отрезок KC — иско-
мый“ (черт. 36). Ясно, что KC^2
 $= KE^2 - EC^2 = AB^2 - EC^2$.



Черт. 36.

116. 5, 13, 17, 25, 37, 39.

117. Если диаметр круга D , то $\frac{\pi D^2}{4} = \left(\frac{13}{15} D\right)^2$, следовательно,

$$\pi = \frac{676}{225}, \text{ или } \pi = 3,00(4), \text{ т. е. меньше истинного } 3,141...$$

Погрешность около 4,30%.

Ариабхатта (род. в 476 г.), астроном и математик, автор трактата „Ариабхаттиам“, написанного в первой половине VI века и состоящего из 4 частей. Вторая часть, изложенная крайне сжато в виде правил, касается арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрических таблиц.

118. Решение. Пусть у 1-го a вещей и m монет,
у 2-го b вещей и p монет.

Если x — ценность вещи, то $ax + m = bx + p$, откуда

$$x = \frac{p - m}{a - b}.$$

119. Эта задача есть, в сущности, родоначальница наших пре-
словутых задач о „курьерах“. Ясно, что до встречи одно светило
пройдет путь x в $\frac{x}{v}$ времени, а другое путь $d - x$ в $\frac{d - x}{v_1}$,

следовательно, $\frac{x}{v} = \frac{d - x}{v_1}$, откуда $x = \frac{vd}{v + v_1}$.

$$120. \text{ Так как } S = \frac{n(a + l)}{2} = \frac{n[2a + r(n - 1)]}{2},$$

то $2S = 2an + rn^2 - rn$, или $n^2r - n(r - 2a) - 2S = 0$.

Решение этого квадратного уравнения дает:

$$n = \frac{r - 2a \pm \sqrt{(r - 2a)^2 + 8Sr}}{2r}.$$

Если отбросить отрицательный корень и упростить, получим:

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{-2a + \sqrt{(r-2a)^2 + 8Sr}}{r} \right].$$

121. Эта задача представляет суммирование так называемых треугольных чисел вида: $\frac{n(n+1)}{2}$.

Напишем натуральный ряд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . .

Ряд треугольных чисел будет:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 \dots$$

Ясно, что сумма двух рядом стоящих чисел всегда представляет точный квадрат. Обозначая любое треугольное число символом T , будем иметь:

$$\begin{aligned} T_n + T_{n-1} &= n^2 \\ T_{n-1} + T_{n-2} &= (n-1)^2 \\ &\dots \dots \dots \\ T_3 + T_2 &= 3^2 \\ T_2 + T_1 &= 2^2. \end{aligned}$$

Назовем сумму $T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$ через Σ_n , тогда сложение предыдущих равенств даст:

$$\begin{aligned} T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \dots + T_2) + T_1 &= \\ &= n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2, \end{aligned}$$

или

$$\Sigma_n + \Sigma_n - (T_1 + T_n) = S_n - 1,$$

где S_n — сумма квадратов натуральных чисел,

$$2\Sigma_n = S_n - 1 + 1 + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

($T_1 = 1$), или

$$2\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6},$$

$$2\Sigma_n = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6},$$

$$\Sigma_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Например,

$$\Sigma_{10} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220.$$

Парамадисвара, индусский математик, о котором известно только, что он комментировал сочинение Ариабхатты.

122. Метод обратных действий заключается в том, что к искомому подходят, производя действия над числами в порядке, обратном тому, какой указан в условии задачи, при чем, очевидно, и все действия заменяются обратными. Иногда этот прием называют „методом инверсии“

$$\sqrt{4} = 2; 2 + 1 = 3; 3^2 = 9; 9 - 6 = 3; 3 \cdot 5 = 15; \frac{15}{3} = 5.$$

Сридхара — автор трактата „Ганита-сара“, или „Сущность вычисления“. Бхаскара-Ачариа часто на него ссылается и даже заимствует от него задачи. Время жизни с точностью не установлено, но во всяком случае в промежутке VI—X веков.

123. Составляем уравнение:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) + 1 = x,$$

откуда $x = 15$.

Брамагупта, знаменитый индусский математик (род. в 598 г.). Его астрономический трактат „Брама-спутта-сидданта“ состоит из 20 книг. Из них книга XII содержит арифметику, а XVIII — алгебру. В арифметической части ряд глав посвящен разбору интересных геометрических вопросов. Алгебраическая — занимается по преимуществу уравнениями первой и второй степеней как определенными, так и неопределенными.

124. Если искомая высота x , то

$$x + \sqrt{(x + h)^2 + m^2 h^2} = h + mh.$$

Переноса x в правую часть и возводя в квадрат, по упрощении будем иметь:

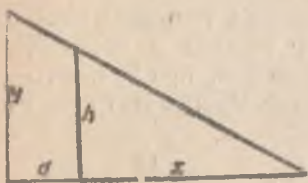
$$x(m + 2) = hm,$$

откуда

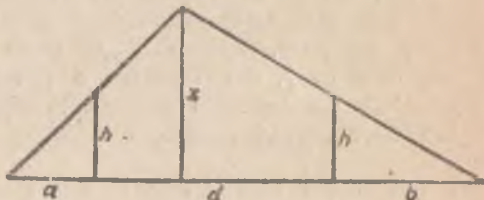
$$x = \frac{hm}{m + 2}.$$

125. Из подобия треугольников (черт. 37) имеем:

$$\frac{x}{x+d} = \frac{h}{H}, \text{ откуда } x = \frac{hd}{H-h}.$$



Черт. 37.



Черт. 38.

126. Легко видеть, что

$$\frac{d}{x-h} = \frac{a+b+d}{x}$$

(черт. 38), откуда

$$x = \frac{h(a+b+d)}{a+b} = h \left(1 + \frac{d}{a+b} \right).$$



Черт. 39.

127. Треугольники BCF и BAE подобны (черт. 39) (последний треугольник получается, если из вершины B провести диаметр BE и соединить точки A и E). Из подобия их $a:h = BE:c$, откуда $\frac{ac}{h} = BE$.

128. Эта задача легко решается на основании леммы Архимеда (задача 53).

Действительно (черт. 40):

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2,$$

где D — диаметр, но

$$m^2 + p^2 = a^2$$

$$q^2 + n^2 = b^2,$$

следовательно,

$$a^2 + b^2 = D^2;$$

точно так же:

$$\begin{aligned} m^2 + q^2 &= c^2 \\ n^2 + p^2 &= d^2, \end{aligned}$$

следовательно,

$$c^2 + d^2 = D^2.$$

129. Так как

$$MK^2 = \frac{MN^2}{4} = a \cdot b = a(D - a),$$

где D — диаметр (черт. 41), то

$$\frac{MN^2}{4} + a^2 = aD;$$

деля на a , получим:

$$\frac{MN^2}{4a} + a = D.$$

130. Это вытекает из зависимости

$$4aD - 4a^2 = MN^2,$$

полученной в предыдущей задаче. Вычитая обе части почленно из D^2 , получаем:

$$D^2 - 4aD + 4a^2 = D^2 - MN^2$$

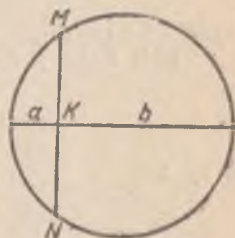
$$(D - 2a)^2 = D^2 - MN^2$$

$$D - 2a = \sqrt{D^2 - MN^2}$$

$$a = \frac{1}{2} (D - \sqrt{D^2 - MN^2}).$$



Черт. 40.



Черт. 41.

Бхаскара-Акариа (род. 1114 г.), знаменитый индусский математик (приставка „акариа“ означает „мудрец“, „ученый“), автор трактата „Сидданта-сиромани“. Введение к нему содержит арифметику — „Лилавати“, что буквально означает „прекрасная“, и алгебру — „Виджа Гаинита“ (вычисление корней).

131. Решение Бхаскары. Если бы искомое число равнялось 3, то по условию $3 \cdot 5 = 15$, одна треть от 15 равна 5. Так как $15 - 5 = 10$, то если разделить 10 на 10, получим единицу. Если прибавить к ней $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ от 3, будем иметь

$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$, т. е. $\frac{17}{4}$, но должно быть 68, т. е. в 68: $\frac{17}{4} =$
 $= 16$ раз больше, следовательно, искомое число $3 \cdot 16 = 48$.

$$\begin{aligned} 132. \quad & \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \\ & = \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 5}} = \\ & = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

133. Составляем уравнение: $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 6 = x$, откуда $x = 120$.

134. Если у первого было x , а у второго y , то

$$x + 100 = 2(y - 100)$$

$$y + 10 = 6(x - 10),$$

откуда

$$x = 40; \quad y = 170.$$

Но решение Бхаскары оригинально: пусть у первого $2x - 100$, а у второго $x + 100$, что удовлетворяет первому условию. Тогда:

$$6(2x - 110) = x + 110,$$

откуда $x = 70$, следовательно, у первого $140 - 100 = 40$, у второго $70 + 100 = 170$.

135. Уравнение будет $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$, откуда $x_1 = 48$; $x_2 = 16$.

Уравнение, готовое к решению, имеет вид: $x^2 - 64x + 768 = 0$, но Бхаскара пишет $x^2 - 64x = -768$ и прибавляет к обеим частям по 32^2 :

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024$$

$$(x - 32)^2 = 256$$

$$x - 32 = \sqrt{256} = 16 \text{ и } x = 48.$$

В данном случае, говорит Бхаскара, отрицательные единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше их, а потому последние можно считать и положительными и отрицательными, и получаем двойное значение x : 48 и 16.

136. Решение Бхаскары. Пусть число пчел роя $2x^2$. Тогда корень квадратный половины этого числа есть x , а $\frac{8}{9}$ всего роя равны $\frac{16}{9}x^2$, следовательно,

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2;$$

$$2x^2 - 9x = 18; \quad x = 6 \text{ и } 2x^2 = 72.$$

137. Уравнение:

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35.$$

Решение Бхаскары:

$$x^3 + 12x - 6x^2 = 35.$$

Вычитаем по 8:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$$

$$(x - 2)^3 = 27$$

$$x - 2 = 3 \text{ и } x = 5.$$

Для нахождения двух других корней (которые Бхаскара не дает) мы решим это уравнение несколько иным (но также элементарным) путем:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0,$$

$$x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + 7x - 35 = 0,$$

$$x^2(x - 5) - x(x - 5) + 7(x - 5) = 0,$$

$$(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0,$$

откуда либо $x - 5 = 0$, и, следовательно, $x_1 = 5$, либо $x^2 - x + 7 = 0$, откуда легко найти x_2 и x_3 .

$$138. \quad x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

$$x^4 - 11x^3 + 11x^3 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999 = 0$$

$$x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) + 909(x - 11) = 0$$

$$(x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0,$$

отсюда $x - 11 = 0$ и, следовательно, $x_1 = 11$ — корень, который дает Бхаскара. Но имеем, кроме того:

$$x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

$$x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 = 0$$

$$x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101(x + 9) = 0$$

$$(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0,$$

следовательно, $x_2 = -9$ и $x^2 + 2x + 101 = 0$, откуда найдем мнимые корни x_3 и x_4 .

139. Бхаскара пользуется тождеством:

$$[(m^2 + n^2)x]^2 = [(m^2 - n^2)x]^2 + (2mnx)^2$$

и принимает $(m^2 + n^2)x$ за гипотенузу, а $(m^2 - n^2)x$ и $2mnx$ за катеты. Тогда по условию: $(m^2 + n^2)x = mn(m^2 - n^2)x^2$, следовательно,

$$x = \frac{m^2 + n^2}{mn(m^2 - n^2)}.$$

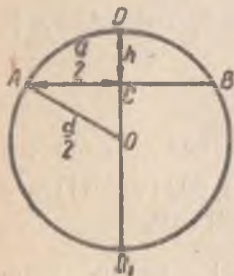
140. Ограничимся указанием для треугольника. Его сторона в данном случае равна $1000 \cdot \sqrt{3}$, но $\sqrt{3} \approx 1,73205$, следовательно, $1000 \cdot 1,73205 = 1732,05$.

141. Имеем $\frac{D^3}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{D^3}{2} = \frac{\pi D^3}{6}$, или $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2}$,

откуда

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

142. Пусть диаметр равен d ; основание сегмента $AB = a$. Искомая высота $DC = h$ (черт. 42). Тогда $\frac{a^2}{4} = h(d - h) = hd - h^2$. Получаем квадратное уравнение:



Черт. 42.

$$h^2 - hd + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$h = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2}$$

$$h_1 = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = OD_1 + OC.$$

$$h_2 = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = OD - OC.$$

143. $16 \frac{2}{3}$ нишка.

144. Уравнение $ax + by + c = xy$ может быть преобразовано так: $c = xy - ax - by$.

Прибавляем по ab :

$$ab + c = xy - ax - by + ab,$$

или

$$ab + c = y(x - b) - a(x - b) = (x - b)(y - a).$$

Бхаскара заключает, что в случае рациональных x и y надо взять:

$$x = b + n$$
$$y = a + \frac{ab + c}{n}.$$

145. Эта задача предложена одним индусом профессору Дельбо.

Решение: Пусть x — число плодов, доставшихся утром каждому. Тогда $3x + 1$ есть то, что осталось на утро. Третий взял $\frac{1}{2}(3x + 1)$, следовательно, он нашел $\frac{3}{2}(3x + 1) + 1$.

Второй взял $\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}(3x + 1) + 1 \right]$, а нашел $\frac{3}{2} \left[\frac{3}{2}(3x + 1) + 1 \right] + 1$;

первый взял $\frac{3}{4} \left[\frac{3}{2}(3x + 1) + 1 \right] + \frac{1}{2}$, или $\frac{27x + 19}{8} = 3x + 2 + \frac{3(x + 1)}{8}$, что должно быть числом целым. Наименьшее

значение x , удовлетворяющее этому условию, будет 7. Следовательно, первый взял 26 плодов и 1 дал обезьяне, второй взял 17 плодов и 1 дал обезьяне. Третий взял 11 плодов и 1 дал обезьяне. Утром каждый получил по 7 плодов, т. е. все вместе 21, и один дал обезьяне. Все число плодов: $26 + 17 + 11 + 21 + 4 = 79$.

Евреи

Научные знания древних евреев складывались под влиянием Вавилона и Египта.

Влияние первого особенно сказалось в еврейской метрологии. Первоначальные геометрические сведения носили узко прак-

тический характер обмера полей, определения емкости сосудов и т. д. Арифметические знания были необходимы для ведения хозяйственной отчетности. Основным памятником раввинской письменности является „Талмуд“ (т. е. учение, изъяснение), создававшийся в промежутке от 300 г. до н. эры до 500 года. Это — своего рода огромная энциклопедия, где в целом ряде трактатов имеется много сведений по астрономии, математике и метрологии. Значительное число ученых, переводчиков и комментаторов в области точного знания работало при дворах калифов в позднейшие эпохи расцвета арабского владычества. Средние века дали также несколько имен. В новое время, когда математическое творчество стало общечеловеческим достоянием, еврейская математическая мысль растворялась обычно в сфере той национальности, с которой евреи были связаны территориально.

146. Эта задача заимствована из трактата „Незикин“, — последней части обширной Бавы-Батры, — касающегося вопросов постройки, земельных наделов, продажи полей, устройства гробниц и т. д.

Решение. Если дворы одинаковы, то ясно, что на пятый двор падает 5 долей всех расходов, на четвертый 4 и т. д. Следовательно, всех долей 15. Поэтому пятому двору приходится платить $\frac{1}{3}$, четвертому $\frac{4}{15}$, третьему $\frac{1}{5}$, второму $\frac{2}{15}$ и первому $\frac{1}{15}$ общей суммы.

147. Трактат „Охалот“ (Шатры) содержит ряд геометрических вопросов. В данной задаче, если назвать сторону квадрата S , а окружность C , будем иметь $4S - C = S$, т. е. $C = 3S$; так как S равно диаметру вписанного круга, то $2\pi R = 6R$, следовательно, $\pi = 3$.

148. Трактат „Менахот“ („Приношение“) содержит данные из метрологии и арифметические расчеты.

Ясно, что $a_1 = 1$, $a_n = 60$, $n = 60$ и $d = 1$, следовательно, сумма

$$S = \frac{(60 + 1) 60}{2} = 1830.$$

149. Моисей бен-Маймон (Маймонид), выдающийся ученый (1135—1204) из Кордовы. Эта задача взята из комментариев к трактату „Килаим“ (разнородное, смесь).

Ясно, что в наружной полосе (в окаймлении) засеяно 12 кв. ладоней. Квадрат $abcd$ содержит 36 кв. ладоней. Следовательно, 13-я гряда составляет его половину 18 кв. ладоней, а всего, следовательно, засеяно 30 кв. ладоней, т. е. $\frac{15}{32}$ участка.

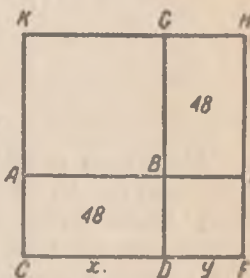
150. Ибн-Эзра Авраам бен-Меир (1093—1167), один из ученых раввинов, родом из Толедо. После него остался арифметический трактат, впервые разобранный, хотя весьма неясно, Теркемом.

Приближение для π , данное Ибн-Эзрой, точно до второго десятичного знака. Оно больше истинного.

Савасорда, известный под именем Авраам Иудей из Барселоны (начало XII века). Его работы легли в основу „Практической геометрии“ Леонардо Пизанского.

151. $x_1 = 7$; $x_2 = -11$ (у Савасорды решено геометрически).

152. Обычное решение: $z^2 - 14z + 48 = 0$; откуда $z_1 = 8$; $z_2 = 6$. Савасорда строит прямоугольник $ABDC = 48$ и линию $CF = 14$ (черт. 43). Затем строит на последней квадрат $KCFH$. Ясно, что $GHEB = 48$, а весь квадрат $KCFH = 196$, следовательно:



$$KABG + BDFE = 100 = x^2 + y^2,$$

Черт. 43.

но $2xy = 96$ и $(x - y)^2 = 4$, откуда $x - y = 2$, тогда легко найти x и y . Так же решается и вторая система.

153. Удвоив второе уравнение почленно, имеем:

$$(x + y)^2 = a^2 + 2b, \quad (x - y)^2 = a^2 - 2b,$$

следовательно,

$$x + y = \sqrt{a^2 + 2b} \quad \text{и} \quad x - y = \sqrt{a^2 - 2b};$$

отсюда найдем x и y . Для числового уравнения $x = 3$; $y = 2$.

154. Второе уравнение возводим в квадрат:

$$x^2 + y^2 - 2xy = b^2,$$

следовательно,

$$a^2 - b^2 = 2xy; \quad 2a^2 - b^2 = (x + y)^2; \quad x + y = \sqrt{2a^2 - b^2},$$

отсюда найдем x и y .

155. Из второго уравнения $(x + y)(x - y) = b^2$ получим $x - y = \frac{b^2}{a}$; дальнейшее очевидно.

Абен-Дреат, испанский раввин XII века, принявший христианство под именем Иоганн Испанец. Автор трактата „Книга алгоризма“, представляющего извлечение из „Алгебры“ арабского математика Альхваризми.

156. $x^2 + 9 = 6x$; $x = 3$.

157. $x^2 + 10x = 39$; $x_1 = 3$; $x_2 = -13$.

158. $x^2 = 3x + 4$; $x_1 = 4$; $x_2 = -1$.

Levi ben Gerson (1288—1344) из Авиньона.

159. $y = 17 \frac{12}{17}$ $z = 17 \frac{5}{68}$.

Арабы

На основе возросшего экономического могущества арабов в промежутке IX—XIII веков создалась арабская наука. В эту эпоху арабы были передовым культурным народом. От них в первую очередь заимствовали научные, в частности, математические знания, европейцы. Сами арабы, усвоив все то, что было сделано греками и индусами, значительно продвинули вперед ряд отделов математики, преимущественно алгебру и тригонометрию.

В области алгебры арабы отчасти следовали грекам, решая, например, уравнения путем геометрических построений, но они первые попытались перейти от риторических или описательных приемов к символическим. Им принадлежит постановка и обратного вопроса — приложения алгебры к геометрии. Особенно значительны их успехи в области тригонометрии.

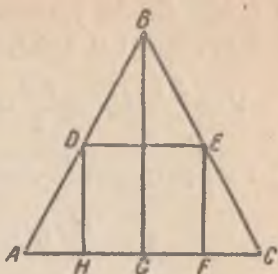
Магомед ибн-Муса Альхваризми (IX век), автор трактата „De Algebra et almuchabala“ (830 г.), первого по времени из дошедших до нас арабских трактатов по алгебре. Кроме того, ему принадлежит трактат по арифметике.

160. 1) $x = 8$; 2) $x = 6$; 3) $x_1 = 7$; $x_2 = 3$; 4) $x_1 = 24$; $x_2 = -12$; 5) $x_1 = 9$; $x_2 = \frac{9}{4}$; 6) $x_1 = 12$; $x_2 = -19$.

Все примеры Муса решает геометрически. Он знает, что уравнению удовлетворяют два значения, но пользуется только одним. Уравнение (5) приведено без решения.

161. Высота $BG = \sqrt{BC^2 - GC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$; $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ (черт. 44).

Если $DE = x$, то $x : (8 - x) = AC : BG$
 $= 12 : 8$; $20x = 96$; $x = 4 \frac{4}{5}$.



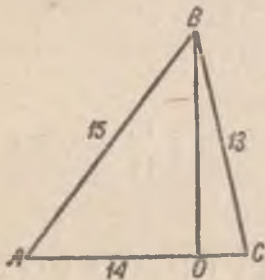
Черт. 44.

162. Пусть $OC = x$ (черт. 45), $OB^2 = 169 - x^2$;

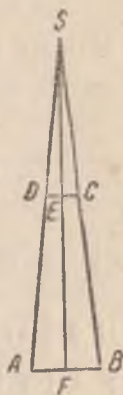
$$AO^2 = (14 - x)^2 = 196 - 28x + x^2;$$

$OB^2 = 225 - AO^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$,
 следовательно, $169 - x^2 = 29 + 28x - x^2$; $140 = 28x$; $x = 5$.

$$AO = 9; OB = \sqrt{169 - 25} = 12.$$



Черт. 45.



Черт. 46.

163. Пусть сечение пирамиды — трапеция $ABCD$, где $DC = 2$, $AB = 4$, $EF = 10$ (черт. 46). Дополним трапецию до треугольника DSC . Высота $SE = 10$ (из подобия треугольников ABS

и DSC). Объем усеченной пирамиды найдется как разность полной пирамиды и надстроенной:

$$V = \frac{FS}{3} \cdot AB^2 - \frac{SE}{3} \cdot DC^2 = \frac{20}{3} \cdot 16 - \frac{10}{3} \cdot 4 = \frac{280}{3} = 93 \frac{1}{3}.$$

Тот же результат, очевидно, получим и по обычной формуле:

$$V = \frac{H}{3} (B + b + \sqrt{Bb}) = \frac{10}{3} (16 + 4 + 8).$$

Ал-Кархи (XI век), автор двух трактатов „Кафил фил Хисаб“ („Все известное в арифметике“) и „Ал-Факри“ — обширное сочинение по алгебре. В первом трактате много внимания уделено и геометрии.

164. Ответ: $6x^4 + 13x^3 + 29x^2 + 22x + 20$.

165. Если a^2 — наибольший квадрат, содержащийся в данном числе N , то пусть $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} = a + x$, где $x < 1$. Тогда $a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2$, или $r = 2ax + x^2 = x(2a + x)$, откуда

$$x = \frac{r}{2a + x};$$

Ал-Кархи заменяет в знаменателе x на единицу и получает:

$$x = \frac{r}{2a + 1} < \frac{r}{2a + x}.$$

$$\sqrt{415} = 20,371;$$

по Ал-Кархи:

$$\sqrt{415} = 20 + \frac{15}{2 \cdot 20 + 1} = 20 + \frac{15}{41} = 20,366.$$

166. 1) $a + 2$; 2) $2a - 1$.

$$\begin{aligned} 167. \sqrt{2} + \sqrt{18} &= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{18})^2} = \sqrt{2 + 18 + 2\sqrt{36}} = \\ &= \sqrt{20 + 12} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Формула

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

встречается в X книге „Начал“ Евклида, а также у индусов.

168. Ал-Кархи полагает:

$$x(3 + \sqrt{5}) = 1; 3x + x\sqrt{5} = 1; 3x + \sqrt{5x^2} = 1;$$

$$\sqrt{5x^2} = 1 - 3x; 5x^2 = (1 - 3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2;$$

$$4x^2 - 6x + 1 = 0; x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Ал-Кархи берет корень $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ за исконое ($x_1 > 1$).

Обычный прием:

$$x = \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

169. Ал-Кархи ищет число, которое, будучи прибавлено к $x^2 + 10x$, дало бы с ним полный квадрат. Такое число есть 25. Тогда

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = 39 + 25 = 64; x + 5 = 8 \text{ и } x = 3.$$

Он называет этот способ „методом решения наподобие Диофанта“.

170. 1) Подстановка $x^2 = z$ приводит к квадратному уравнению $z^2 + 5z = 126; z_1 = 9; z_2 = -14$; отсюда найдем x .

$$2) z^2 + 24 = 10z; z_1 = 6; z_2 = 4.$$

$$3) z^2 = 2z + 8; z_1 = 4; z_2 = -2.$$

$$4) \text{ Подстановка } x^3 = z \text{ дает } z^2 = 3z + 40; z_1 = 8; z_2 = -5.$$

$$5) \text{ Сокращаем на } x^3; x^4 = bx^2 + c \text{ и т. д.}$$

$$171. \text{ Решение Ал-Кархи: } y = \frac{10}{x}; z = \frac{100}{x^3}, \text{ тогда}$$

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10\,000}{x^6};$$

$$10\,000 = 100x^4 + x^8; x^4 = -50 + \sqrt{12\,500};$$

$$x = \sqrt{\sqrt{12\,500} - 50}.$$

Это же решение встречаем и у Леонардо Пизанского в „Книге абака“.

$$172. a_{20} = 19 \cdot 4 + 3 = 79; S_{20} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820.$$

$$173. S_{10} = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = 55.$$

174. 1) Ал-Кархи полагает: $y = x + 1$, следовательно, $y^2 = x^2 + 2x + 1$, тогда $x^2 + 5 = x^2 + 2x + 1$; $2x = 4$ и $x = 2$; $y = 3$.

2) Ал-Кархи полагает: $y = x - 1$, следовательно,

$$y^2 = x^2 - 2x + 1,$$

тогда $x^2 - 10 = x^2 - 2x + 1$; $2x = 11$; $x = 5\frac{1}{2}$; $y = 4\frac{1}{2}$.

175. Ал-Кархи полагает: $z = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$,

$$\begin{aligned} \text{тогда} \quad x^2 + 2x + 2 &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} + x^2 + x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}; \end{aligned}$$

$$x + \frac{3}{4} = \sqrt{x^2 + x + 1}; \quad x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = x^2 + x + 1;$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{7}{16}; \quad x = \frac{7}{8}; \quad y = \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{13}{8}; \quad z = \frac{17}{8}.$$

176. Надо решить уравнение: $x^2 + y^2 = z^2$. Ал-Кархи полагает:

$$y = x + 1; \quad z = nx - 1.$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = n^2x^2 - 2nx + 1; \quad x(n^2 - 2) = 2(n + 1) \text{ и}$$

$$x = \frac{2(n + 1)}{n^2 - 2}; \quad z = \frac{(n + 1)^2 + 1}{n^2 - 2}; \quad y = \frac{n(n + 2)}{n^2 - 2}.$$

177. Ал-Кархи полагает: $x = my$, $z = ny$. Тогда

$$m^a y^a + y^a = n^{a+1} y^{a+1}; \quad y^a (m^a + 1) = n^{a+1} y^{a+1},$$

откуда:

$$y = \frac{m^a + 1}{n^{a+1}}.$$

$$\begin{aligned} 178. \quad \sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a} &= \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + 2mn}{4} - a} = \\ &= \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2mn}{4}} = \frac{m - n}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично} \quad \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + a} = \frac{m + n}{2}.$$

179. Решение Ал-Кархи: положи равным x расстояние места встречи от корней большей из пальм, возвысь в квадрат, получишь x^2 . Прибавь к этому 900, т. е. квадрат высоты большей пальмы, и положи эту сумму равной квадрату $50 - x$, т. е. $2500 + x^2 - 100x$, увеличенному на квадрат высоты другой пальмы 400:

$$x^2 + 900 = 2500 + x^2 - 100x + 400,$$

получишь $x = 20$. Расстояние точки встречи от корней меньшей пальмы 30. Прямая, которую пролетала каждая птица, будет $\sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$.

180. Если высота x , то основание $3x$, площадь $3x^2$. Сумма периметра и диагонали $8x + x\sqrt{10}$. По условию

$$3x^2 = 8x + x\sqrt{10}; \quad x = 2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10}.$$

Основание $3x = 8 + \sqrt{10}$.

181. Если ширина x , то длина $2x$. Тогда площадь $2x^2$, а периметр $6x$. По условию $2x^2 = 6x$, следовательно, $x = 3$.

182. Решение Ал-Кархи: пусть диаметр x , квадрат его x^2 .

Отнимаем $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}$ квадрата диаметра. Остаток

$$\frac{5}{7}x^2 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}x^2 = 100; \quad x^2 = 127\frac{3}{11} = \frac{1400}{11}.$$

Обычное решение: $\frac{\pi d^2}{4} = 100$; $d^2 = \frac{400}{\pi}$; следовательно, $\frac{400}{\pi} = \frac{1400}{11}$ или $\pi = \frac{22}{7}$. Итак, если $\frac{11}{14}$ квадрата диаметра считать площадью круга, то получается архимедово приближение для π .

183. Построив чертеж, читатель легко найдет, что

$$\begin{aligned} a_{12}^2 &= \left[\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{3}{16}d^2} \right]^2 + \left(\frac{d}{4} \right)^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{3}{16}d^2 - \frac{d^2}{4}\sqrt{3} + \\ &+ \frac{d^2}{16} = d^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{d^2}{4} (2 - \sqrt{3}) = r^2 (2 - \sqrt{3}); \\ a_{12} &= r \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Табит ибн-Корра (836 — 901), известен как переводчик сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония и Птолемея на арабский язык. До нас дошел один из оригинальных трудов его, посвященный изучению различных свойств чисел.

184. Делители числа A будут $1, 2, 2^2, \dots, 2^n$, сумма их, очевидно, есть $2^{n+1} - 1$, затем $p(2^{n+1} - 1)$ будет сумма делителей, содержащих p ; $q(2^{n+1} - 1)$ будет сумма делителей, содержащих q , наконец, $pq(2^n - 1)$ — сумма делителей, содержащих pq , следовательно, полная сумма делителей

$$(2^{n+1} - 1)(1 + p + q) + pq(2^n - 1).$$

Если подставить значения p и q , то после упрощений получим число B .

Ал-Кухи, Вайдшан ибн-Рустам (X век), занимался преимущественно геометрией.

185. Вопрос сводится к решению уравнения:

$$(10 - x)^2 + x^2 + \frac{10 - x}{x} = 72,$$

или

$$2x^3 + 27x + 10 = 20x^2.$$

Впервые это уравнение решено арабским математиком Абул-Джудом (XI век). Сам Ал-Кухи не сумел его решить, хотя оно решается элементарно:

$$2x^3 - 20x^2 + 27x + 10 = 0$$

$$2x^3 - 4x^2 - 16x^2 + 32x - 5x + 10 = 0$$

$$2x^2(x - 2) - 16x(x - 2) - 5(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(2x^2 - 16x - 5) = 0$$

$$x - 2 = 0, \text{ откуда } x_1 = 2 \text{ и } 2x^2 - 16x - 5 = 0$$

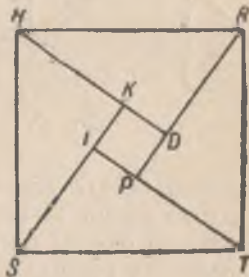
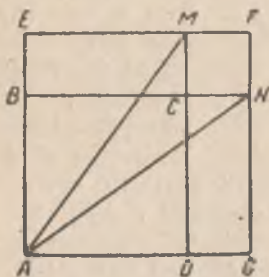
$$x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{74}}{2}.$$

186. Очевидно, центр искомого круга лежит в пересечении данной прямой с равноделящей угла, образуемого данными прямыми. Если прямые параллельны, центр находится в середине отрезка, отсекаемого параллелями от данной прямой.

Абул-Вафа, замечательный арабский математик X века (940—998), переводчик и комментатор греческих геометров. Из многочисленных его трактатов до нас дошли только отрывки.

187. Проводим биссектрисы двух углов и из точки их пересечения опускаем перпендикуляры на стороны. Дальнейшее ясно.

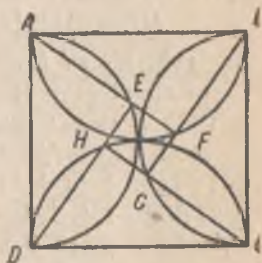
188. Наложим один данный квадрат на другой ($ABCD$ на $AGFE$). Продолжаем BC и CD до пересечения со сторонами



Черт. 47.

большого квадрата в точках M и N и соединим их с точкой A . Получаем два равных прямоугольника $ADME$ и $ABNG$ и маленький квадрат $MFNC$. Прямоугольники разбиваются диагоналями AM и AN на равные треугольники. Катеты их будут сторонами данных квадратов, а CN —сторона маленького квадрата равна разности этих сторон. Располагаем (черт. 47) около этого квадрата четыре прямоугольных треугольника, катеты которых равны сторонам квадратов. Получим квадрат, равный сумме двух данных квадратов, стороны которых неизвестны.

189. Дан квадрат $ABCD$ (черт. 48). Опишем на его сторонах, как на диаметрах, полуокружности. Возьмем хорды $AE = BF = CG = DH$, равные данной стороне. Очевидно, линии AEF , BFG , CGH , DHE прямые. (Действительно, угол ADE равен углу BAF , так как дуга AE равна дуге BF . С другой стороны, угол ADE равен углу BAE , ибо треугольник ADE прямоугольный; следовательно, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAE$.) Эти

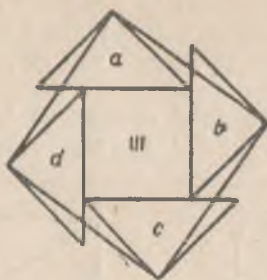
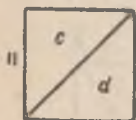
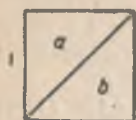


Черт. 48.

линии образуют маленький квадрат $EFGH$ и четыре равных прямоугольных треугольника AED , BFA , BGC , DHC . Из четы-

рех этих треугольников и квадрата $HEFG$ на основании предыдущей задачи получим, что требуется.

190. Берем три (равных данному) квадрата и первые два делим диагоналями пополам (черт. 49). Полученные равнобедренные прямоугольные треугольники a , b , c , d



Черт. 49.

прикладываем гипотенузами к сторонам третьего квадрата так, чтобы каждая вершина последнего совпадала с вершиной не более как только одного треугольника. Если вершины треугольников соединить прямыми, получим искомый квадрат.

Авиценна (ибн-Сина), философ, врач и математик (980—1037). В Лейденской библиотеке хранится рукопись его трактата по арифметике.

191. Пусть $N = 9k + 1$, тогда

$$N^2 = 81k^2 + 18k + 1 = \text{кр.} \cdot 9 + 1.$$

Пусть $N_1 = 9k + 8$, тогда

$$N_1^2 = 81k^2 + 144k + 64 = 9(9k^2 + 16k + 7) + 1.$$

192. Пусть $N = 9k + 2$, тогда $N^2 = 81k^2 + 36k + 4 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти} + 4$; пусть $N_1^2 = 9k + 7$, тогда $N_1^2 = 81k^2 + 126k + 49 = 9(9k^2 + 14k + 5) + 4$.

193. Пусть $N = 9k + 1$, тогда $N^3 = (9k)^3 + 3 \cdot (9k)^2 + 3 \cdot 9k + 1 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти} + 1$; пусть $N_1 = 9k + 4$, тогда $N_1^3 = (9k)^3 + 3 \cdot (9k)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 9k \cdot 16 + 64 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти} + 1$; пусть $N_2 = 9k + 7$, тогда $N_2^3 = (9k)^3 + 3 \cdot (9k)^2 \cdot 7 + 3 \cdot 9k \cdot 49 + 343 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти} + 1$.

194. $N = 9k + 2$; $N^3 = (9k)^3 + 3 \cdot (9k)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 9k \cdot 4 + 8 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти} + 8$ и т. д.

195. $N = 9k + 3$; $N^3 = (9k)^3 + 3 \cdot (9k)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 9k \cdot 9 + 27 = \text{кр.} \cdot 9\text{-ти}$ и т. д.

Арабская математическая рукопись Лейденской библиотеки n° 168 содержит ряд интересных задач. Предлагаемая задача разобрана знаменитым ориенталистом Бёнке.

196. Пусть $KZ = x$; $TZ = y$; $x:y = BK:AB = (x+5):10$;

$$10x = yx + 5y; xy = KZ \cdot TZ = 16 \text{ (так как } \frac{xy}{2} : 100 = 2:25);$$

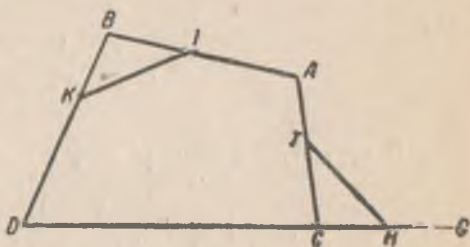
$$5y + 16 = 10x, y = 2x - 3\frac{1}{5}; xy = 2x^2 - 3\frac{1}{5}x = 16.$$

$$x^2 = 8 + 1\frac{3}{5}x; x^2 - \frac{8}{5}x - 8 = 0; x = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} + 8} = KZ.$$

$$TZ = \frac{16}{\frac{4}{5} + \frac{6\sqrt{6}}{5}} = \frac{80}{4 + 6\sqrt{6}} = \frac{40}{2 + 3\sqrt{6}} = \frac{40(3\sqrt{6} - 2)}{50} = \\ = \frac{4}{5}(3\sqrt{6} - 2).$$

Гассан ибн-Гайтем (умер в 1038 г.), даровитый арабский геометр, следовавший в своих работах методам древних греков (например, в трактате „О геометрических известных“).

197. Решение. Дан четырехугольник $ABDC$. Продолжим DC до точки G . Отложим $BK = CH$ и $BI = CT$. Если окажется, что $TH = KI$, то четырехугольник вписывается



Черт. 50.

в окружность (ибо тогда $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$). В противном случае — не вписывается. (Эта задача помещена в вышеупомянутом трактате в рукописи 1104, хранящейся в Парижской библиотеке.)

Ал-Кальсади, Абдул Гассан Али-бен Мухамед, родом из Гренады (XV век), автор трактата „Раскрытие тайн науки Гобар“, содержащего основы арифметики и алгебры. „Гобар“ означает по-арабски „пыль“, и ученый ориенталист Бёнке полагает, что это название присвоено искусству вычисления потому, что арабы производили выкладки на доске, посыпанной песком.

$$\sqrt{m+\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} + \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}},$$

откуда легко получается выражение Ал-Кальсади.

$$199. \frac{a(m-\sqrt{n})}{(m+\sqrt{n})(m-\sqrt{n})} = \frac{a(m-\sqrt{n})}{m^2-n}.$$

200. Пусть $n = a^2 + r$. Если $r \leq a$, то автор считает $\sqrt{a^2+r}$ равным $a + \frac{r}{2a}$. Если $r > a$, он дает более точное значение:

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r+1}{2a+2},$$

т. е. Ал-Кальсади знает, что при $r > a$

$$\sqrt{a^2+r} < a + \frac{r+1}{2a+2} < a + \frac{r}{2a}.$$

Действительно:

$$2ar + 2a < 2ar + 2r,$$

или

$$a + \frac{r+1}{2a+2} < a + \frac{r}{2a}.$$

С другой стороны: $\sqrt{a^2+r} < a + \frac{r+1}{2a+2}$

$$a^2 + r < a^2 + \frac{(r+1)^2}{(2a+2)^2} + \frac{2a(r+1)}{2a+2}$$

$$r(2a+2)^2 < 2a(r+1)(2a+2) + (r+1)^2.$$

После упрощений:

$$2(r-2a) < (2a-r)^2 + 1,$$

но это неравенство имеет место при $r \leq 2a$, а если $r > 2a$, т. е., по крайней мере, $r = 2a + 1$, тогда $n = a^2 + r = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ и, следовательно, a не будет наибольшим квадратом, содержащимся в n .

201. 1) $x_1 = 4$; $x_2 = -14$; 2) $x_1 = 10$; $x_2 = 2$; 3) $x_1 = -10$; $x_2 = +2$; 4) $x = 4$; 5) $x_1 = 3$; $x_2 = -5$; 6) $x_1 = 6$; $x_2 = 2$;

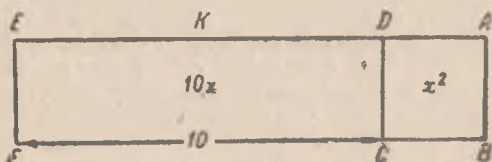
7) $x_1 = 9$; $x_2 = -1$; 8) $x_1 = 7$; $x_2 = -3$; 9) тождествен с примером 5.

Омар Хейам (XI век), один из виднейших арабских математиков, автор трактата „Об алгебраических доказательствах“, в котором он дает способы геометрического построения корней кубического уравнения.

202. Решение Омар-Хейама: „Квадрат и десять корней равны тридцати девяти. Умножь половину корней саму на себя. Произведение это придай к числу (т. е. к 39), из корня квадратного вычти половину числа корней. Остаток будет равен корню квадрата:

$$\left(x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - 5\right)^2.$$

Геометрическое решение: пусть квадрат будет $ABCD$ (x^2), увеличенный на десять корней ($10x$), он равен тридцати девяти. Десять корней представляются в виде прямоугольника $CDEF$ (черт. 51). Прямая $DE = 10$. Разделим ее в точке K пополам. Произведение EA на AD , равное прямоугольнику $ABFE$, прибавленное



Черт. 51.

к квадрату DK , будет равно квадрату AK $[(10 + x)x + 25 = (x + 5)^2]$. Но квадрат DK (25) известен, а также известен прямоугольник $ABFE$, выражающий данное число (39). Следовательно, квадрат AK и линия AK будут известны $(x + 5)$, а когда вычтем DK из AK , то остаток AD будет известен.

203. Решение Омара: $z = \frac{1}{x}$; $z^2 + 2z = \frac{5}{4}$;

$$z^2 + 2z + 1 = \frac{9}{4}; (z + 1)^2 = \frac{9}{4}; z + 1 = \frac{3}{2}; z = \frac{1}{2};$$

следовательно, $x = 2$.

Бега Эддин (XVI век), иранский математик, автор трактата „Коласатал-Хисаб“ („Сущность искусства счисления“), до начала XIX века служившего руководством при изучении математики в школах Индии и Ирана.

204. Пусть меньшая часть x , большая $5 + x$. Тогда по условию $2x + 5 = 10$; $2x = 5$ и $x = 2\frac{1}{2}$.

205. $\frac{50}{10} = 5$; $5 \cdot 5 = 25$; $25 - 3 = 22$; $11 - 2 = 9$; $\sqrt{9} = 3$.

206. $x + \frac{2}{3}x + 1 = 10$; $\frac{5}{3}x = 9$; $x = 5\frac{2}{5}$.

Но Бега Эддин решает по правилу „чашек весов“ (*regula falsi*), встречающемуся в сочинениях ибн-Эзры, ибн-Албанна, Ал-Кальсади. Сущность метода заключается в следующем: пусть дано уравнение $ax + b = 0$. Подставим произвольные значения z_1 и z_2 вместо x . Будем иметь $az_1 + b = k_1$ и $az_2 + b = k_2$. Величины k_1 и k_2 назовем погрешностями уравнения. Легко видеть, что

$$a(x - z_1) = -k_1;$$

$$a(x - z_2) = -k_2;$$

следовательно: $\frac{k_1}{x - z_1} = \frac{k_2}{x - z_2}$, откуда $\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{k_1}{k_2}$.

Разности $x - z_1$ и $x - z_2$ называют погрешностями подстановок. Из последнего равенства:

$$x = \frac{k_2 z_1 - k_1 z_2}{k_2 - k_1},$$

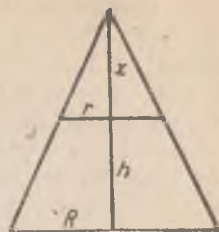
Бега Эддин полагает $z_1 = 9$. Тогда $9 + \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = 16$ (погрешность $k_1 = 6$); потом $z_2 = 6$; $6 + \frac{2}{3} \cdot 6 + 1 = 11$; вторая погрешность $k_2 = 1$; тогда:

$$x = \frac{1 \cdot 9 - 6 \cdot 6}{1 - 6} = \frac{27}{5}.$$

207. Обычное решение: Пусть большая часть x . Тогда меньшая $20 - x$. По условию $x(20 - x) = 96$, или $x^2 - 20x + 96 = 0$; $x = 10 \pm \sqrt{100 - 96} = 10 \pm 2$; $x_1 = 12$; $x_2 = 8$. Но

решение Бега Эддина проще: положи одно число $10 + x$, тогда другое $10 - x$. Их произведение $100 - x^2 = 96$, откуда $x^2 = 4$ и $x = 2$, следовательно, $10 + x = 12$, $10 - x = 8$.

208. Дополнив данный усеченный конус (черт. 52), имеем $x:r = (x+h):R$, откуда $x = \frac{rh}{R-r}$, следовательно, $x+h = \frac{Rh}{R-r}$.



Это выражение было известно еще Ал-Кархи.

Черт. 52.

209. Имеем уравнение: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 3 = x$, или

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 3 - x = 0.$$

Пусть длина рыбы 12, тогда $k_2 = -2$. Возьмем еще за длину рыбы 24, тогда $k_1 = -7$. По правилу:

$$x = \frac{24 \cdot (-2) - (-7) \cdot 12}{-2 - (-7)} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}.$$

210. Решение Бега Эддина. Пусть часть шеста под водой x , длина всего шеста $5 + x$. После наклонения она будет гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами x и 10.

Следовательно, $(x+5)^2 = 100 + x^2$, или $10x = 75$ и $x = 7\frac{1}{2}$.

Длина всего шеста $12\frac{1}{2}$ локтей.

211. Имеем систему: $x + y = 10$; $(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = 24$. Нетрудно видеть, что для удовлетворения условия, поставленного в примечании к задаче, можно только принять:

$$x + \sqrt{x} = 12; y + \sqrt{y} = 2,$$

что дает $x = 9$ и $y = 1$.

Западная Европа VIII—XV век

В раннее европейское средневековье математика принижается до уровня собирания рецептов практического характера, не обоснованных никакими доказательствами, если не считать доказательством ссылку на авторитет того или иного автора древности.

Такое состояние математики обусловлено было общей застойностью общественной жизни, крайне низким уровнем развития производительных сил.

С оживлением экономической жизни Западной Европы начинается и подъем математики. Арабы, с которыми столкнулись европейцы в борьбе за торговые пути, оказали сильное влияние на развитие европейской математики, и первыми странами, в которых математика получила новый толчок к развитию, были как раз те, которые первыми вступили на путь международной торговли (Испания, Италия). В XI—XII веках арабская ученость усваивается европейцами; на латинский язык (международный язык ученых того времени) переводится в тот период много арабских сочинений, а также и сочинения греческих авторов, переведенные ранее на арабский язык.

Алкуин (735—804), основатель так называемой „Палатинской“ школы (в Туре), принимавший участие в основании университетов в Париже и Павии. В его сочинениях по арифметике мы встречаемся с типом задач, впоследствии составивших то, что французы называют „Recréations mathématiques“ („Математические развлечения“), и в ближайшие ко времени Алкуина века пользовавшихся большой популярностью. Рукописные сборники подобных задач распространялись в большом количестве. Такова, например, рукопись из библиотеки монастыря в Рейхенау (около 1000 г.) под названием „Задачи для изощрения ума“.

212. Имеем систему: $3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100$ и $x + y + z = 100$.

Исключаем z :

$$200 - 6x - 4y = 100 - x - y; \quad 100 = 5x + 3y,$$

или $20 = x + \frac{3y}{5}$. Так как y — целое, то оно должно быть кратно 5, например $5u$, тогда $y = 5u$ и $20 = x + 3u$, откуда $x = 20 - 3u$. Ясно, что u может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сообразно с этим получаем 7 решений:

Мужчин $x = 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2$.

Женщин $y = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$.

Детей $z = 80, 78, 76, 74, 72, 70, 68$.

Алкуин дает только одно решение: 11, 15, 74.

213. Так как у каждого должно быть по $3\frac{1}{2}$ бочки вина, то ясно, что возможны два решения:

	у 1-го	у 2-го	у 3-го	у 1-го	у 2-го	у 3-го
Бочек полных	3	3	1	2	2	3
" полуполных	1	1	5	3	3	1
" пустых	3	3	1	2	2	3

214. С каждым прыжком собака выигрывает 2 фута, следовательно, все расстояние в 150 футов она покроет 75 прыжками.

Герберт (930—1003), архиепископ Реймский, впоследствии папа Сильвестр II, автор двух арифметических сочинений („Вычисления с помощью абака“ и „О делении чисел“).

215. Если x и y — катеты, a — гипотенуза, Δ — площадь, имеем: $xy = 2\Delta$; $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение Герберта:

$$\begin{aligned} 2xy &= 4\Delta \\ x^2 + y^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Сложение и вычитание дают:

$$(x + y)^2 = a^2 + 4\Delta; \quad x + y = \sqrt{a^2 + 4\Delta}, \quad (1)$$

$$(x - y)^2 = a^2 - 4\Delta; \quad x - y = \sqrt{a^2 - 4\Delta}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{a^2 + 4\Delta} + \sqrt{a^2 - 4\Delta}}{2}; \\ y &= \frac{\sqrt{a^2 + 4\Delta} - \sqrt{a^2 - 4\Delta}}{2}. \end{aligned}$$

Леонардо Фибоначчи из Пизы (родился в 1180), автор двух трактатов: „Книга абака“ (1202) и „Практическая геометрия“ (1220). Первый написан под сильным влиянием арабской математической литературы, второй есть переработка „Liber embadorum“ Савасорды, правда, расширенный. Сочинения Леонардо пользовались большой популярностью.

216. Вопрос сводится к решению системы:

$$x + 7 = 5(y - 7); \quad y + 5 = 7(x - 5);$$

откуда $x = 7\frac{2}{17}$; $y = 9\frac{14}{17}$.

217. Всего 117 649 предметов. См. зад. 25.

218. Имеем систему: $x + y + z = 30$; $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30$, где x — число воробьев, y — число горлиц и z — число голубей. Исключаем z : $10x + 9y = 180$ и $y = 20 - \frac{10}{9}x$. Для x единственное значение 9. Следовательно, $y = 10$ и $z = 11$.

219. Иоанн из Палермо, магистр, придворный математик, предложивший эту задачу Леонардо Фибоначчи на турнире.

Пусть t — общая сумма. 1-й уносит x , 2-й — y , 3-й — z . Тогда имеем систему:

$$\begin{aligned}\frac{t}{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right) \\ \frac{t}{3} &= \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right) \\ \frac{t}{6} &= \frac{5}{6}z + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right).\end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем наименьшее значение $y = 13$ и $t = 47$, откуда $z = 1$ и $x = 33$. Доля первого $23\frac{1}{2}$, второго $15\frac{2}{3}$, третьего $7\frac{5}{6}$. Задача имеет три решения.

220. $x = 4$; $y = 6$. 221. $x = 7$; $y = 3$. 222. $x = 8$; $y = 2$.

223. $x = 9$; $y = 3$. 224. $x = 6$; $y = 4$. 225. $x = 8$; $y = 2$.

226. Решение Леонардо. Исключаем y и получаем:

$$x^2 + \sqrt{50\,000} - 200 = 10x,$$

откуда $x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50\,000}}$.

Возможно и дальнейшее упрощение:

$$x = 15 - \sqrt{125}, \quad y = \sqrt{125} - 5.$$

Леонардо дает и другой способ. Пусть $\frac{y}{x} = z$. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{1}{z} = \sqrt{5} - z$. Так как $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$, то $z(\sqrt{5} - z) = 1$ и $z = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}$. Дальше $y = 10 - x$ и $z = \frac{10 - x}{x}$, откуда $\frac{10 - x}{x} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}$ дает $x = 15 - \sqrt{125}$.

227. Решение Леонардо (с помощью ложного положения). Он полагает $z=1$. Тогда

$$x_1 + y_1 = 9; x_1 = y_1^2; 1 + y_1^2 = y_1^4 \text{ и } x_1 = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}};$$

$$y_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}}.$$

Вместо 10 теперь сумма неизвестных равна

$$S = \sqrt{\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}} + 1.$$

Затем он берет пропорцию: $S:10=1:z$, откуда $Sz=10$.

Подстановка S дает: $z=5 - \sqrt{\sqrt{3125}-50}$ и т. д.

228. $4\sqrt{x^2-3x}=20-3x$; возводим обе части в квадрат; по упрощении получаем:

$$7x^2 + 72x - 400 = 0; x_1 = 4; x_2 = -\frac{100}{7}.$$

229. Леонардо полагает $y = \sqrt{x^2-3x}$, тогда

$$4y = y^2 + 4 \text{ и } y = 2;$$

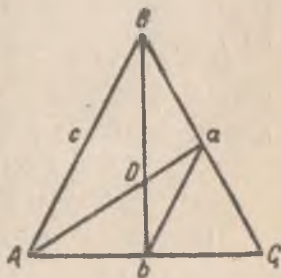
из уравнения $4 = x^2 - 3x$ находим x .

230. $x(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{x(1 + \sqrt{2})} - 10 = 0$. Получается квадратное уравнение, решение которого не представляет никакого труда.

231. Проводим две медианы Aa и Bb , и пусть O есть точка их пересечения (черт. 53). Соединим точки a и b . $\triangle aOb \sim \triangle AOB$; $Oa:ab = AO:AB$, но $ab = \frac{1}{2} AB$, следовательно:

$$Oa = \frac{1}{2} AO.$$

Если провести медианы Cc и Aa , то для точки их пересечения O_1 опять получим $O_1a = \frac{1}{2} O_1A$.



Черт. 53.

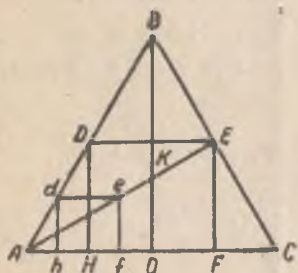
232. 1) Пусть квадрат $DEFH$ — искомый (черт. 54). Сторона его $DE = x$. $DE:BK = AC:BO$; если $AC = a$, то $BO = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, отсюда

$$x: \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x \right) = a: \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1: \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$x = a(2\sqrt{3} - 3).$$

2) Решение построением. Соединим точку E с A , предположив, что искомый квадрат построен. Через произвольную точку e линии AE проведем $de \parallel DE$ и $ef \parallel EF$. Так как $de:DE = Ae:AE = ef:EF$, то из равенства DE и EF следует $de = ef$, т. е. фигура $efhd$ — квадрат. Отсюда построение: взяв произвольный квадрат $defh$, соединяем A с точкой e и продолжаем Ae до встречи с BC в точке E . Через E проводим $ED \parallel de$. DE — сторона искомого квадрата.



Черт. 54.

233. Пусть $AB = p$; $BC = q$; $Bb = r$ (черт. 55). Из прямоугольного треугольника ABD :

$$DB^2 = p^2 + q^2.$$

Из прямоугольного треугольника DBb :

$$DB^2 + Bb^2 = Db^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

234. Решение Леонардо. Пусть искомое число x^2 , тогда по условию:

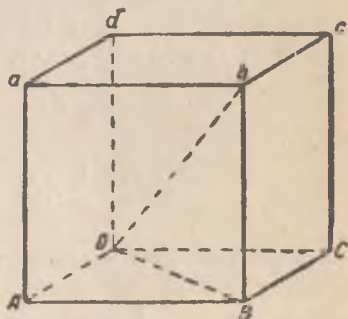
$$x^2 + 5 = u^2 \text{ и } x^2 - 5 = v^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 = 10 &= (u + v)(u - v) = \\ &= \frac{1440}{144} = \frac{80 \cdot 18}{12^2}. \end{aligned}$$

Полагая

$$u + v = \frac{80}{12} \text{ и } u - v = \frac{18}{12},$$



Черт. 55.

находим:

$$u = \frac{49}{12} \text{ и } v = \frac{31}{12},$$

откуда

$$x = \frac{41}{12}.$$

Проверка:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2; \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

$$235. x=8; y=6. \quad 236. x=8; y=6.$$

$$237. x=8; y=6.$$

$$238. x+y+\sqrt{x^2+y^2}=24; \quad \sqrt{x^2+y^2}=24-(x+y).$$

Возводя в квадрат, найдем: $x+y=14$; затем по сумме и произведению находим $x=8$ и $y=6$.

$$239. x=8; y=6. \quad 240. x=8; y=6.$$

$$241. \text{ Решение. Всего вина было } \frac{(1+9)9}{2} = 45 \text{ кварт, сле-}$$

довательно, каждый брат должен получить по 15 кварт. Задача сводится к определению числа комбинаций девяти чисел натурального ряда по три так, чтобы сумма всегда равнялась 15. Из этих девяти чисел, как известно, можно составить простейший магический квадрат:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}$$

Примем суммы, стоящие в вертикальных столбцах, за одно из решений. Так как братьев трое, то может быть шесть комбинаций. Но можно взять суммы горизонтальных столбцов. Тогда получим еще шесть решений, а всего, следовательно, 12 решений.

Иордан Неморария (конец XII века, умер в 1237 г.), автор целого ряда сочинений по арифметике, алгебре и геометрии. Особенно важное значение имеет алгебраический трактат „О данных числах“. Он первым в средние века обозначает величины буквами.

$$242. \text{ Из 2-го уравнения } x=2z; \text{ из 4-го } y=1\frac{1}{2}u; \text{ первое уравнение дает тогда } 2z+1\frac{1}{2}u=20. \text{ Комбинируем с третьим: } z+u=12 \text{ и легко находим: } z=4; u=8; y=12; x=8.$$

243. Из 2-го уравнения $x = 3z$, тогда 1-е дает $3z + y = 15$. Сложение 3-го и 4-го дает $z + y = 11$, откуда $2z = 4$, следовательно $z = 2$. Далее находим: $y = 9$; $x = 6$; $u = 7$.

244. $x = 6$; $y = 6$; $z = 4$; $u = 6$.

245. $x = 25$; $y = 15$; $z = 9$.

246. $x = 16$; $y = 12$; $z = 9$.

247. $x = 15$; $y = 10$; $z = 6$; $u = 4$.

248. $x = 1$; $y = 19$; $z = 25$; $u = 28$.

249. $x = 2$; $y = 14$; $z = 24$; $u = 34$.



Черт. 56.

250. Площадь треугольника равна $\frac{bh}{2}$,

следовательно, наибольшая площадь будет при наибольшей высоте. Ясно, что точка B — вершина равнобедренного треугольника ABC — наиболее удалена от основания.

Иоганн Мюллер, прозванный по месту рождения (в Mons Regius—Кёнигсберге) Региомontanом (1436—1476), один из выдающихся немецких математиков, особенно известный своими работами по тригонометрии и переводами классиков греческой математики.

$$251. x = \frac{85 \pm 5\sqrt{209}}{4}.$$

252. $10x = x^2 + \frac{100}{27}$; $x = 5 - \sqrt{21 \frac{8}{27}}$. Но Региомontan

тан дает также и другое решение, полагая $\frac{x}{10-x} = y$. Тогда

$y + \frac{1}{y} = 25$; $y = \frac{25}{2} - \sqrt{\frac{621}{4}}$. В обоих случаях Региомontan берет корни со знаком минус.

253. Вопрос приводится к решению системы:

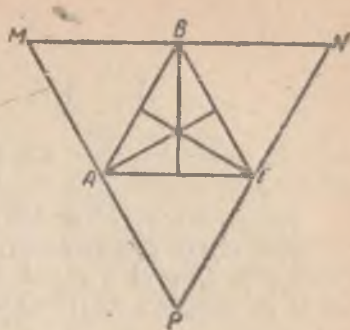
$$17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3.$$

Наименьшие значения: $x = 64$; $y = 84$; $z = 110$.

При этом искомое число есть 1103.

Эта задача была предложена Региомontanом астроному Бианчини. Последний путем подбора нашел два решения: 1103 и 3313.

Тогда Региомонтан указал, что 1103 — наименьшее значение, а последующие получаются прибавлением $17 \cdot 13 \cdot 10 = 2210$, так что второе значение будет $1103 + 2210 = 3313$ и т. д.



Черт. 57.

254. Проведем через вершины данного треугольника ABC (черт. 57) параллели сторонам, противоположным этим вершинам. В полученном треугольнике MNP точки A , B и C — середины сторон MP , MN и PN . Перпендикуляры в этих точках к сторонам треугольника MNP пересекутся в одной точке; вместе с тем для данного треугольника они будут высотами.

255. Пусть $AC - AB = FC = 3$; $AD = 10$; $DC - BD = EC = 6$; $BD = \frac{BC - 6}{2} = \frac{BC}{2} - 3$ (черт. 58).

Если $BC = x$, то $BD = \frac{x}{2} - 3$. Далее,

$$AC - AB = 3 = \frac{6}{2} = \frac{1}{2} (DC - BD).$$

$AD^2 = AC^2 - DC^2 = AB^2 - BD^2$, откуда $AC^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2$, или $(AC - AB)(AC + AB) = (DC - BD)(DC + BD)$. Сокращая на $AC - AB$, получим:

$$AC + AB = 2x, \quad AB = 2x - AC = 2x - AB - 3,$$

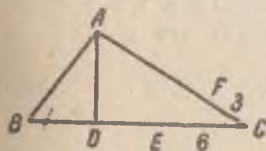
или

$$2AB = 2x - 3; \quad AB = x - \frac{3}{2}.$$

Теперь

$$AB^2 = x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}; \quad BD^2 = \frac{x^2}{4} - 3x + 9.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } AD^2 + BD^2 &= 100 + \frac{x^2}{4} - 3x + 9 = AB^2 = \\ &= x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}; \end{aligned}$$



Черт. 58.

отсюда

$$100 + \frac{27}{4} = x^2 - \frac{x^2}{4}; 3x^2 = 427;$$

$$x = \sqrt{\frac{427}{3}}.$$

Теперь легко найти AB и AC .

256. Пусть стороны треугольника $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$ (черт. 59). Высота $h=BE$ неизвестна. Проведя диаметр BD , имеем из подобия треугольников ABD и BEC :

$$a \cdot c = 2R \cdot h,$$

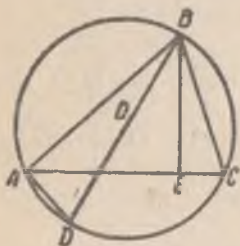
где R — искомый радиус.

Зная три стороны, мы можем вычислить площадь Δ треугольника. Но тогда

$$\frac{bh}{2} = \Delta,$$

откуда

$$h = \frac{2\Delta}{b};$$



Черт. 59.

следовательно, подстановка даст $ac = \frac{4R\Delta}{b}$, т. е. $R = \frac{abc}{4\Delta}$.

Кампано из Наварры (конец XIII века), известен своим латинским переводом с арабского „Начал“ Евклида вместе с дополнениями, т. е. XIV и XV книгами, из которых первая приписывается Гипсиклу, а вторая — Дамасцию. Именно благодаря этому труду, снабженному комментариями (напечатан в 1482 г.), распространилось в Европе знакомство с Евклидом. По поводу задачи **257** Кампано говорит, что предложение это было уже известно Аристее и Аполлонию.

257. Поверхность додекаэдра, как известно, есть

$$2R^2 \sqrt{10(5 - \sqrt{5})},$$

икосаэдра:

$$2R^2 (5\sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

Точно так же объем додекаэдра:

$$\frac{2}{9} R^3 \sqrt{30(3 + \sqrt{5})},$$

а икосаэдра

$$\frac{2}{3} R^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Достаточно приравнять отношения поверхностей и объемов, чтобы путем простых преобразований убедиться в справедливости этого равенства.

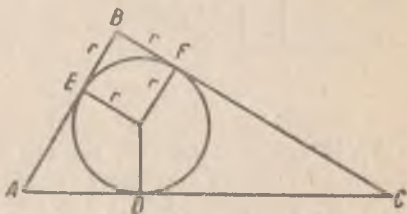
Орезм, Николай (умер в 1382 г.), автор сочинения „*Algorismus proportionum*“. Ему наука обязана понятием дробного показателя.

$$258. a^{\frac{m}{n}}; a^{\frac{1}{m}}; ab^{\frac{1}{n}}; a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}}; \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}}.$$

$$259. \text{Уравнение приводится к квадратному: } x^2 = ax + b.$$

$$260. x^2 = z; z^2 = az + b.$$

Иоган Видман Эгер (конец XV века), автор трактата по арифметике, третья часть которого посвящена геометрии. Видман — первый, открывший чтение курса алгебры с университетской кафедры (в Лейпциге).



Черт. 60.

261. Пусть стороны треугольника ABC даны (черт. 60): гипотенуза $AC = b$; катеты $AB = c$ и $BC = a$. Ясно, что, вписав в треугольник окружность радиуса r , будем иметь:

$$AB = AE + r \quad BC = CF + r,$$

или

$$c + a = AE + CF + 2r;$$

но

$$AE = AD \text{ и } CF = CD.$$

Сложение дает:

$$AE + CF = AD + DC = AC = b,$$

следовательно:

$$c + a = b + 2r,$$

откуда

$$r = \frac{a + c - b}{2}.$$

следовательно,

$$h = \frac{8 \cdot 7}{5} = 11 \frac{1}{5}.$$

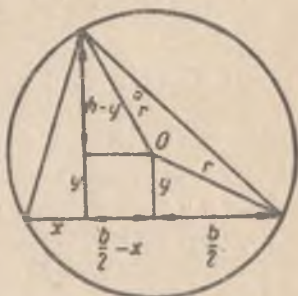
264. Пусть сторона треугольника a (черт. 63). Тогда ясно, что $r = \frac{R}{2}$, кроме того, $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{R^2}{4} + \frac{a^2}{4}$, откуда

$$3R^2 = a^2; R^2 = \frac{a^2}{3}; R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Черт. 63.



Черт. 64.

265. Из чертежа (черт. 64) видно, что $r^2 = y^2 + \frac{b^2}{4}$.

Дальше

$$r^2 = (h - y)^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = h^2 - 2hy + y^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2,$$

следовательно,

$$y^2 + \frac{b^2}{4} = h^2 - 2hy + y^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2,$$

откуда

$$2hy = h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

и

$$y = \frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h}.$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left[\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h} \right]^2}$$

266. Имеем: $43x + 8 = 39y$; $39y + 8 = 35z$; $35z + 8 = 31u$
или: $43x + 16 = 35z = 31u - 8$, и следовательно, $43x + 24 = 31u$.

$$u = \frac{43x + 24}{31} = x + 1 + \frac{12x - 7}{31} = x + 1 + t;$$

$$12x - 7 = 31t$$

$$x = \frac{31t + 7}{12} = 2t + \frac{7t + 7}{12} = 2t + 7t_1, \text{ где } t_1 = \frac{t + 1}{12};$$

$$t = 12t_1 - 1; x = 31t_1 - 2; u = 43t_1 - 2; y = \frac{31 \cdot 43t_1}{39} - 2;$$

$$\text{и } z = \frac{31 \cdot 43t_1}{35} - 2.$$

Чтобы z и y были целыми, необходимо, чтобы $t_1 = 39 \cdot 35$ (по крайней мере). Тогда

$$x = 31 \cdot 39 \cdot 35 - 2$$

$$y = 31 \cdot 35 \cdot 43 - 2$$

$$z = 31 \cdot 39 \cdot 43 - 2$$

$$u = 35 \cdot 39 \cdot 43 - 2.$$

$$**267.** \sqrt{x^2 - x} = 2 - x; x^2 - x = 4 + x^2 - 4x; 3x = 4;$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

268. Если дать каждому на две монеты больше, разница оказывается в 60 монет, следовательно, работников было 30.

Шюке, Николай (умер в 1500 г.), французский математик, автор трактата „Le Triparty en la science des nombres“ (1484), в котором впервые применяются нулевые и отрицательные показатели.

$$**269.** \text{ Два равных корня } (x = 2). \quad **270.** x = 5 \pm \sqrt{2i}.$$

$$**271.** \text{ Корни мнимые. Шюке называет их невозможными.}$$

$$**272.** x = 18 \pm 6\sqrt{5}; \text{ у Шюке } x = 18 \pm \sqrt{180}.$$

$$**273.** z = x^2; \text{ корни мнимые.}$$

$$274. z = x^2, z = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2}. \quad 275. z = x^5.$$

$$276. z = x^4. \quad 277. z = x^5. \quad 278. \text{ Возводим в квадрат:}$$

$$12x - x^2 + 1 + 2\sqrt{12x - x^2} = 36 - x^2$$

$$2\sqrt{12x - x^2} = 35 - 12x.$$

Опять возводим в квадрат:

$$4(12x - x^2) = 1225 - 840x + 144x^2,$$

или

$$148x^2 - 888x + 1225 = 0.$$

$$279. \sqrt{4x^2 + 4x} = 99 - 2x$$

$$4x^2 + 4x = 99^2 + 4x^2 - 4x \cdot 99$$

$$4x(1 + 99) = 99^2$$

$$x = \left(\frac{99}{20}\right)^2.$$

280. $z = 2x$; $y = 12 - 3x$. y будет целым и положительным при $x = 1, 2, 3, 4$.

$$281. x = 0, 2, 4; y = 12, 7, 2; z = 0, 3, 6.$$

$$282. x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; y = 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0; z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

283. $(4x - 5)(2x - 3) = 8x^2 - 22x + 15$. Интересно что в рукописи вычисление ведется так:

$$4x \cdot 2x = 8x^2$$

$$3 \cdot 4x = -12x$$

$$5 \cdot 2x = -10x.$$

284. В рукописи сказано: пусть число будет n . Четыре пятых его составит $\frac{4}{5}n$. Пять шестых его будут $\frac{5}{6}n$. Произведение $\frac{4}{5}n$ на $\frac{5}{6}n$ равно числу, т. е. $\frac{2}{3}n^2 = n$. По форме уравнения $ax^2 = bx$ будет

$$1 \cdot n = \frac{2}{3}n^2,$$

откуда число равно $1\frac{1}{2}$.

285. Первая часть равна 4, вторая равна 6. Действительно

$$\frac{4 \cdot 5}{6} = \frac{10}{3}.$$

286. На высоте $9\frac{1}{10}$ фута. 287. На 7 футов.

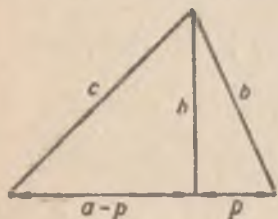
XVI век

Шарль Бувелль (конец XV и начало XVI века), автор сочинения по геометрии, выдержавшего ряд изданий (с 1503 г. по 1608 г.) на латинском языке; был даже французский перевод (1542 г.).

288. Общий вид совершенного числа $4^k(4^k \cdot 2 - 1)$. Число 4^k при делении на 9 дает остатки 4, 7 или 1; $4^k \cdot 2 - 1$ при делении на 9 дает соответственно остатки 7, 4 или 1. Произведения этих чисел дают такие же остатки при делении на 9, как 28 и 1, т. е. единицу.

Бувелль высказал это предложение в 1510 г. Доказательство его дано Антонио Кательди в 1603 г.

Ретикус из Виттенберга (1514 — 1576) известный своими трудами по тригонометрии и составлением тригонометрических таблиц.



Черт. 65.

289. Так как (черт. 65)

$$h^2 = c^2 - (a - p)^2 = b^2 - p^2,$$

то

$$\begin{aligned} c^2 - b^2 &= (a - p)^2 - p^2, \\ (c + b)(c - b) &= (a - p + p)(a - p - p), \end{aligned}$$

или

$$(c + b)(c - b) = a(a - 2p),$$

следовательно:

$$\frac{a}{c + b} = \frac{c - b}{a - 2p}.$$

Лука Пачиоло, де Бурго (1445 — 1514?), автор в свое время весьма распространенного трактата „Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita“ (написан в 1494 г.); в первой части изложена арифметика и алгебра, во второй — геометрия. Второе издание вышло в 1523 г.

290. $\sqrt{48} + 6$ у Пачиоло; упрощая, получим $4\sqrt{3} + 6$.

291. $\sqrt{46} + \sqrt{34} + 2\sqrt[4]{1564}$.

292. $x^3 + 4 = 5x$,

у Пачиоло $x = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 4} + \frac{5}{2}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 1$.

293. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = 81601$;

$$(x^2 + x + 1)^2 = 81601$$

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{81601} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1 + \sqrt{81601}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\sqrt{81601} - \frac{3}{4}}$$

294. Ясно (черт. 66), что $AD = 6$ и $EC = 8$; пусть $BD = BE = x$. С одной стороны, площадь треугольника:

$$\Delta = AOC + AOB + BOC =$$

$$= [14 \cdot 4 + (6 + x)4 +$$

$$+ (8 + x)4] \frac{1}{2} = 56 + 4x.$$

Периметр

$$2p = 2x + 12 + 16; \quad p = x + 14;$$

следовательно,

$$\Delta = \sqrt{(x + 14) \cdot x \cdot 6 \cdot 8},$$

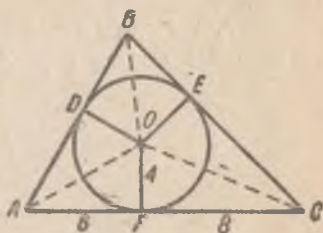
откуда

$$14 + x = \sqrt{3x(x + 14)}; \quad (14 + x)^2 = 3x(x + 14); \quad 14 + x = 3x$$

и

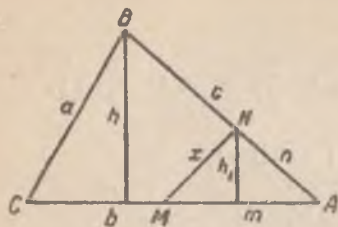
$$x = 7;$$

следовательно, $AB = 13$; $BC = 15$.



Черт. 66.

295. Указание. Пусть даны стороны a, b и c треугольника и отрезки n и m , которые известны, раз точки N и M даны (черт. 67); $MN = x$.



Черт. 67.

Если площади треугольников ABC и AMN назовем соответственно Δ и Δ_1 , то $\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{nm}{bc}$, откуда найдется Δ_1 .

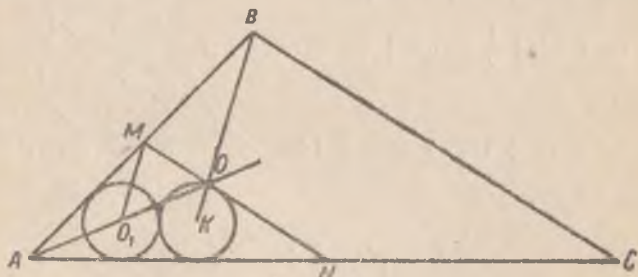
Но

$$\Delta_1 = \sqrt{p(p-x)(p-n)(p-m)},$$

где $p = \frac{x+n+m}{2}$. Отсюда находится x .

296. Решение Пачиоло: пусть a^2 — площадь прямоугольника и d — разность сторон. Большая сторона $x + \frac{d}{2}$, тогда меньшая $x - \frac{d}{2}$, следовательно, $x^2 - \frac{d^2}{4} = a^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2}$; это проще, чем обе стороны принимать за неизвестные.

297. Указание. Вписываем круг произвольного радиуса, касающийся сторон угла A (черт. 68), и строим касающийся

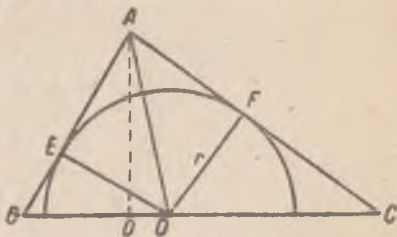


Черт. 68.

этого круга и стороны AC такой же второй круг. Проводим ко второму кругу касательную MN , параллельную BC . Соединяем O_1 с точкой M и проводим из B линию BK параллельно MO_1 . Точка O встречи этой прямой с биссектрисой AO_1 угла A есть центр первого из искомых кругов.

298. Геометрически задача решается очень просто, так как центр искомой окружности лежит в пересечении биссектрисы угла A с противоположной стороной (черт. 69). Опустив перпендикуляр из точки O на AB , найдем радиус OE .

Указание. Чтобы вычислить радиус по трем сторонам треугольника ABC , можно поступить так. Пусть $OC = x$. Тогда $(a - x) : x = c : b$, откуда найдется x . Затем площадь треугольника AOC выражается двояко: $\frac{b \cdot r}{2}$ и $\frac{x \cdot h}{2}$, следовательно, $xh = br$, откуда $r = \frac{xh}{b}$. Высоту h можно, как известно, найти по сторонам a , b и c .



Черт. 69.

299. Пусть стороны будут $x - 1$, x , $x + 1$. Периметр равен $3x$, следовательно,

$$84 = \sqrt{\frac{3}{2} x \cdot \frac{1}{2} x \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{2} - 1\right)} = \\ = \sqrt{\frac{3x^2 (x+2)(x-2)}{16}};$$

$$84 = \frac{x}{4} \sqrt{3(x^2 - 4)}; \quad 336^2 = x^2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 4);$$

$$336 \cdot 112 = x^4 - 4x^2,$$

или $x^4 - 4x^2 - 336 \cdot 112 = 0.$

Если $x^2 = z$, то $z^2 - 4z - 336 \cdot 112 = 0;$

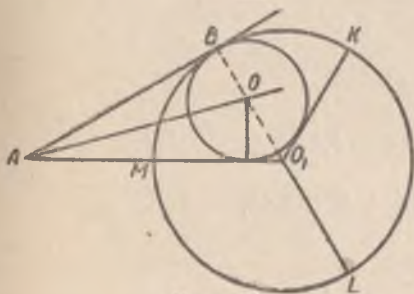
$$z = 2 \pm 2\sqrt{1 + 336 \cdot 28} = 2 \pm 194.$$

Годен корень

$$z_1 = 2 + 194 = 196; \quad x = 14.$$

Следовательно, стороны треугольника 13, 14, 15.

300. Ограничимся указанием, как вписать три круга. Разделим круг на три равных сектора (черт. 70). Центр круга лежит на равноделящей угла MO_1K . Точка B есть точка касания. Продолжаем



Черт. 70.

касательную в точке B до встречи с продолженным радиусом O_1M в точке A . Проводим равноделящую угла BAO_1 . Точка O пересечения двух равноделящих будет центром искомого круга.

301. Решение Пачиоло. Пусть сумма чисел u и v есть x , а их разность y , где x и y — искомые. Тогда:

$$x^2 + y^2 = 2(u^2 + v^2)$$

и

$$xy = u^2 - v^2;$$

$$u^2 + v^2 = 10$$

и

$$u^2 - v^2 = 8,$$

откуда

$$u^2 = 9 \text{ и } u = 3; v^2 = 1 \text{ и } v = 1,$$

следовательно,

$$x = 4; y = 2.$$

Шрейбер, Генрих (Грамматеус) из Эрфурта (умер в 1525 г.), преподаватель математики Венского университета, автор сочинения „Книга счислений“ (1518).

$$302. 30x^2 - 76x + 48.$$

$$303. x = \pm 3; \quad x = \frac{-1 \pm 21}{4}; \quad x = \frac{15 \pm 9}{4}.$$

$$304. x_1 = 4; x_{2,3} = -2(1 \pm \sqrt{3}).$$

$$305. x^4 = 4096; x^2 = \sqrt{4096} = 64; x = 8.$$

306. Эта книга по арифметике (Учение о целых числах и дробях) вышла в Лейпциге в 1507 году.

Пусть дан катет a и сумма другого катета с гипотенузой

$$S = b + c.$$

Так как

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

то

$$c^2 = (S - b)^2$$

дает

$$a^2 + b^2 = S^2 + b^2 - 2Sb,$$

откуда

$$b = \frac{S^2 - a^2}{2S}.$$

307. Аналогично: дана гипотенуза c и сумма катетов

$$S = a + b.$$

Так как

$$c^2 = a^2 + b^2$$

и

$$S^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

то

$$S^2 - c^2 = 2ab,$$

откуда

$$ab = \frac{S^2 - c^2}{2}.$$

По сумме и произведению можно найти a и b .

Ризе, Адам (1492—1559), известный немецкий математик, преподаватель в Аннаберге, автор алгебраического трактата „Die Coss“ (1524).

Алгебраистов немцы называли „коссистами“. Слово „косс“ — испорченное итальянское „Cosa“ — вещь, потому что этим словом обозначали неизвестное.

308. Ответ: 28 флоринов.

309. 10 решений; из $x + y + z = 26$

и

$$6x + 4y + 2z = 88,$$

получим:

$$2x + y = 18,$$

откуда

$$y = 18 - 2x,$$

следовательно,

$$2x \leq 18$$

и

$$x \leq 9,$$

т. е.

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$y = 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$$

$$z = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.$$

Если исключить случаи $x = 0$, $y = 0$, то 8 решений.

310. Пусть у 1-го x , у 2-го y , у 3-го z .

Тогда

$$x + \frac{1}{2} (y + z) = 12,$$

$$y + \frac{1}{3} (x + z) = 12,$$

$$z + \frac{1}{4} (x + y) = 12.$$

Решение системы не представляет труда:

$$x = 3\frac{9}{17}; y = 7\frac{13}{17}; z = 9\frac{3}{17}.$$

311. 1) $x = 2$; 2) $x_1 = 7$; $x_2 = 1$.

312. „Тайны чисел“ Бунгуса вышла в 1559 году. Представим ряд натуральных чисел так:

$$6n, 6n + 1, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 4, 6n + 5,$$

где n может быть равным 0, 1, 2, 3. Из этого ряда только $6n + 1$ и $6n + 5$ могут быть простыми. Но $6n + 5 = 6n + 6 - 1 = 6(n + 1) - 1 = 6k - 1$, следовательно, простые числа имеют вид $6m + 1$.

Обратное предложение неверно.

Кристоф Рудольф (von Jaeger), автор популярнейшего алгебраического трактата „Coss“.

313. Ответ: $9\frac{1}{5}$ флорина.

314. Решение Рудольфа:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{216} : \sqrt[4]{16} &= \sqrt[12]{216^4 : 16^3} = \sqrt[12]{2176782336 : 46656} = \\ &= \sqrt[12]{531441} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{27} = 3.\end{aligned}$$

Действительно: $\sqrt[3]{216} : \sqrt[4]{16} = 6 : 2 = 3$.

315. Решение Рудольфа: из 1-го уравнения $x = a + y$; подставляя во второе, получаем: $y(a + y) = b$; $y^2 + ay - b = 0$.

„Coss“ Рудольфа была обработана и дополнена Стифелем (см. ниже) в 1552 году.

316. Указание. Делим 1-е уравнение на 2-е:

$$\frac{x^2 + y^2}{(x - y)^2} = \frac{337}{49},$$

откуда

$$674xy = 288x^2 + 288y^2,$$

или

$$98xy = 288(x - y)^2;$$

$$\frac{(x - y)^2}{xy} = \frac{49}{144} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2;$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{337}{144};$$

пусть

$$\frac{x}{y} = z,$$

тогда

$$144z^2 - 337z + 144 = 0,$$

откуда

$$z = \frac{16}{9}.$$

Теперь легко найдем: $x = 64$; $y = 36$.

317. $x = 40$; $y = 13$.

318. Приводим подлинное решение.

Перемножаем

$$(x + y)(x^2 - y^2) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 675;$$

$$(x - y)(x^2 + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 351;$$

$$\frac{675}{351} = \frac{25}{13};$$

следовательно,

$$(x^3 + x^2y - xy^2 - y^3) 13 = (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) 25;$$

$$38x^2y - 38xy^2 = 12x^3 - 12y^3;$$

$$38xy(x - y) = 12(x - y)(x^2 + xy + y^2);$$

$$3\frac{1}{6}xy = x^2 + xy + y^2;$$

$$4\frac{1}{6}xy = x^2 + 2xy + y^2;$$

$$\sqrt{4\frac{1}{6}xy} = x + y; \quad (1)$$

$$\frac{1}{6}xy = x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}xy} = x - y; \quad (2)$$

сложим (1) и (2):

$$5\sqrt{\frac{xy}{6}} + \sqrt{\frac{xy}{6}} = 6\sqrt{\frac{xy}{6}} = \sqrt{6xy} = 2x;$$

$$6xy = 4x^2; y = \frac{2}{3}x;$$

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) \left(x^2 - \frac{4}{9}x^2\right) = 675; \frac{5}{3}x \cdot \frac{5}{9}x^2 = 675;$$

$$x^3 = 729; x = 9; y = 6.$$

Стифель, Михаил (1486—1567), знаменитый немецкий математик, автор пользовавшегося большой известностью трактата „Полная арифметика“ (1544, Нюрнберг). Ему, между прочим, принадлежит идея логарифма числа.

319. По Стифелю число вида $(2^{2n+1} - 1) \cdot 2^{2n}$ будет совершенное (при условии, указанном нами в примечании к задаче). Действительно, положив $2n = k$, получим евклидовскую форму совершенного числа: $(2^{k+1} - 1) \cdot 2^k$.

$$320. \frac{9x^4 + 8x^2}{6x^8}.$$

$$321. \frac{4x^2}{3x^8}.$$

$$322. \frac{27x^5 + 24x^3}{12x^3}.$$

$$323. \frac{9x^4 + 8x^2}{6x^3}.$$

$$324. \frac{27x^2 + 24}{12}.$$

$$325. 12x^4 + 16x^3 - 36x^2 - 32x + 24.$$

$$326. x = 6.$$

$$327. x = 4(1 + \sqrt{2}).$$

$$328. \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4; \sqrt[3]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{4} = 2;$$

$$4 + 2 = 6; \sqrt[3]{16} = 4; \sqrt[3]{8} = 2; 4 + 2 = 6.$$

$$329. 24 + \sqrt{552}. \text{ Можно упростить: } 2(12 + \sqrt{138}).$$

$$330. \text{ Пусть } AO = R; AB = a_5; AC = a_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$OD = h \text{ (черт. 71).}$$

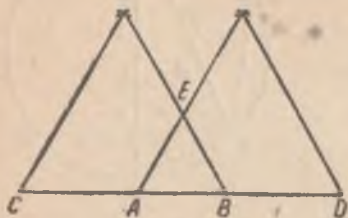
Имеем:

$$a_{10}^2 = 2R \cdot (R - h),$$

откуда

$$h = R \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right),$$

к линии AB . Отложив n раз (на чертеже — 4 раза) радиус, концы отрезков C и D соединим с B и A . Точки деления соединяем параллелями (AD и CB). Отрезок AB при этом разделится на n равных частей (в данном случае — на четыре).



Черт. 73.

336. Из конца A данного отрезка AB (черт. 73) данным раствором циркуля делаем засечку D , а из точки B такую же с другой стороны (в точке C). Строим на AD и BC равносторонние треугольники. Точка E их пересечения будет третьей вершиной равностороннего треугольника ABE .

Кардан, Джеронимо (1501—1576), итальянский математик, опубликовавший в своем сочинении „Великое искусство или об алгебраических правилах“ (1545) впервые решение кубических уравнений, хотя основная формула заимствована им у Тартальи. Там же Кардан излагает и решение уравнений 4-й степени по способу, открытому его талантливым учеником Лодовико Феррари. Кардан первый ввел в алгебру действия с мнимыми количествами.

$$337. (5 + i\sqrt{15})(5 - i\sqrt{15}) = 25 - i^2 \cdot 15 = \\ = 25 - (-1) \cdot 15 = 25 + 15 = 40.$$

$$338. x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

339. Прибавляем к обеим частям по $3x^2$:

$$16x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1;$$

$$16x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2;$$

$$4x = x^2 + x + 1;$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0; x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

У Кардана только эти два корня. Остальные находятся из уравнения:

$$-4x = x^2 + x + 1; x^2 + 5x + 1 = 0;$$

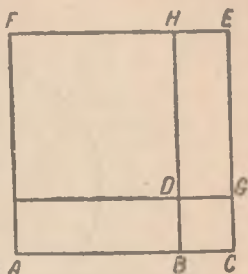
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

340. Решение Кардана: пусть квадрат FD (черт. 74) есть x^2 , следовательно, его сторона $FD=x$. $DG=DB=3$ (половине коэффициента при x). Построим квадрат $AFEC$. Прямоугольник AD равен прямоугольнику DE , т. е. равен $3x$. Сумма квадрата FD и двух этих прямоугольников равна x^2+6x , что, по условию, равно 91. Малый квадрат $BCGD=9$, следовательно, квадрат $AFEC=100$. Следовательно, $AC=10$; но $AC=x+3$, откуда $x=7$. Обычный прием:

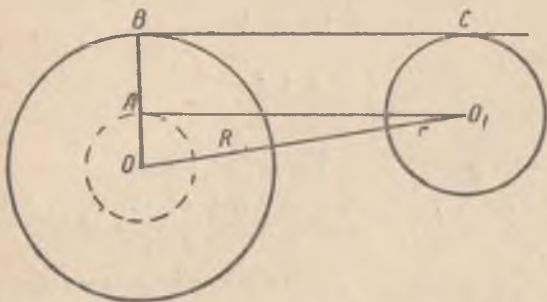
$$x^2+6x-91=0; x=-3 \pm \sqrt{9+91} = A$$

$$=-3 \pm 10; x_1=7; x_2=-13.$$

Черт. 74.



341. Кардан первый дал полное решение этой задачи. Первый случай. Касательная по одну сторону линии центров. Из центра O окружности большего радиуса (черт. 75) описываем окружность радиусом равным $R-r$. Из точки O_1 проводим к ней касательную O_1A . Точку A соединяем с O и продолжаем OA до встречи с окружностью радиуса R в точке B . Через B проводим $BC \parallel AO_1$; BC — искомая касательная.

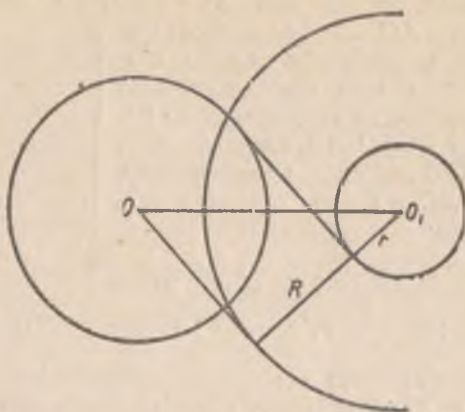


Черт. 75.

Во втором случае, когда общая касательная пересекает линию центров, из O_1 проводим вспомогательную окружность радиусом равным $R+r$ (черт. 76).

Бенедиктис, Джиованни Бенедетти (1539—1590), итальянский математик, автор трактата „Diversarum speculationum mathe-

matheſium^a (Турин, 1585). Особенность его изложения состоит в том, что он иллюстрирует выводы алгебры геометрически.



Черт. 76.

342. Сложение первых двух уравнений дает:

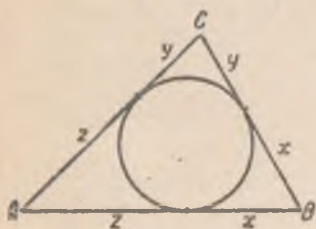
$$x + 2y + z = a + b,$$

но

$$x + z = c,$$

следовательно,

$$y = \frac{a + b - c}{2}.$$



Черт. 77.

Точно так же:

$$x = \frac{a + c - b}{2}; \quad z = \frac{b + c - a}{2}.$$

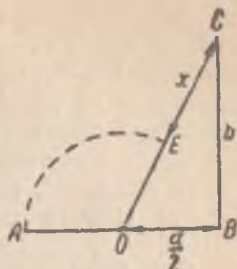
Бенедетти дает и геометрическое толкование: возьмем треугольник со сторонами a, b, c (черт. 77). Если вписать в него круг, то в точках касания стороны разобьются на отрезки, так что $x + y = a$; $y + z = b$; $z + x = c$.

343. Если исконое x , а данные a и b , то по условию $x(x + a) = b^2$, или $x^2 + ax = b^2$, т. е. уравнение 2-й степени.

Отсюда

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

Бенедетти дает построение корня (черт. 78): строим прямой угол и на сторонах его отложим $AB = a$ и $BC = b$. Разделив в точке O линию AB пополам, соединим точки O и C . Из O радиусом AO опишем дугу, встречающую OC в точке E . Отрезок $CE = x$.

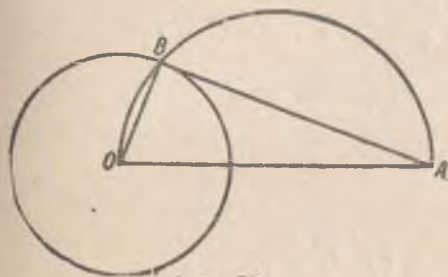


Черт. 78.

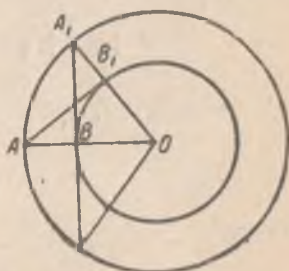
Клавий, Кристоф (1537—1612), преподаватель математики в Риме, автор трактата по алгебре (1609) и издатель „Начал“ Евклида с комментариями.

344. $x_1 = 6$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

345. Дана точка A и окружность O (черт. 79). Соединяем ее с центром и на прямой OA как на диаметре опишем окружность. Точку B ее пересечения с данной окружностью соединяем с A . Линия AB будет искомой касательной. Интересно, что в 1899 г. на Мюнхенском съезде математиков было дано построение касательной, как новое, но оказалось принадлежащим Евклиду. Пусть A — внешняя точка. Опишем из O радиусом AO окружность и проведем BA_1 перпендикулярно AO (черт. 80). Точку A_1



Черт. 79.



Черт. 80.

соединим с O . Точку B_1 пересечения A_1O с данной окружностью соединим с A . AB_1 — искомая касательная.

Доказательство почти очевидно (из треугольников AOB_1 и A_1OB).

Виета, Франсуа (1540 — 1603), знаменитый французский математик, труды которого содействовали успехам алгебры и тригонометрии. Благодаря ему алгебра от синкопированной (т. е. основанной на обозначениях в виде сокращений) перешла к символической форме. Сам Виета обозначал неизвестные гласными буквами, а известные — согласными. Особенно много ему обязана теория уравнений. Главнейшие его труды „*In artem analyticam isagoge*“ (1591) и „*De aequationum recognitione et emendatione*“ (1615).

346. Дано уравнение:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Пусть

$$x = y + z.$$

Тогда

$$x^2 = y^2 + 2yz + z^2,$$

следовательно, уравнение примет вид:

$$y^2 + 2yz + z^2 + py + pz + q = 0;$$

$$y^2 + y(2z + p) + z^2 + pz + q = 0.$$

Выберем z так, чтобы коэффициент при y в первой степени исчез, т. е. чтобы $2z + p$ равнялось нулю. Тогда $z = -\frac{p}{2}$. При этом выражение:

$$z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4},$$

и, следовательно, уравнение принимает вид:

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

откуда

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

но

$$x = y + z,$$

следовательно,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

347. Действительно, пусть $x = a$.

Тогда

$$a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a = abc,$$

$$a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc = abc$$

Получаем тождество $abc = abc$.

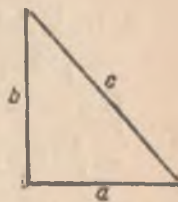
Первое из уравнений имеет корни 1, 2, 3.

Второе: — 2, + 2, + 4.

348. По теореме Пифагора (черт. 81)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$



Черт. 81.

следовательно, зная a и b , например, можно не только вычислить c , но определить ее размер построением. Таким образом, можно по данной величине a построить $a\sqrt{5}$. Для этого преобразуем:

$$\sqrt{5a^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2},$$

т. е. $a\sqrt{5}$ есть гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и $2a$.

Точно так же:

$$a\sqrt{11} = \sqrt{11a^2} = \sqrt{36a^2 - 25a^2} = \sqrt{(6a)^2 - (5a)^2};$$

$$a\sqrt{13} = \sqrt{13a^2} = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = \sqrt{(2a)^2 + (3a)^2};$$

$$a\sqrt{17} = \sqrt{17a^2} = \sqrt{a^2 + 16a^2} = \sqrt{a^2 + (4a)^2};$$

$$a\sqrt{26} = \sqrt{26a^2} = \sqrt{a^2 + 25a^2} = \sqrt{a^2 + (5a)^2};$$

$$a\sqrt{34} = \sqrt{34a^2} = \sqrt{9a^2 + 25a^2} = \sqrt{(3a)^2 + (5a)^2}$$

$$349. x = \frac{b(c+d)}{b+d}.$$

350. Полагаем:

$$y^3 = z; \quad z^2 + 2b^3z - a^6 = 0; \quad z = -b^3 \pm \sqrt{b^6 + a^6}.$$

Зная z_1 и z_2 , получим два кубических двучленных уравнения:

$$y^3 = z_1; \quad y^3 = z_2.$$

Бомбелли Рафаэло (1530 — ?), итальянский математик, автор трактата по алгебре (на итальянском языке) „L'algebra parte mag-

giore dell'Aritmetica divisa in tre libri" (1572). В этом сочинении впервые обнаруживается ясное понимание значения мнимых количеств. Кроме того, Бомбелли значительно усовершенствовал алгебраическое знакоположение.

$$\begin{aligned}
 351. \quad \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} &= \sqrt[3]{2 + 11i} = \sqrt[3]{8 + 12i - 6 - i} = \\
 &= \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 i^2 + i^3} = \sqrt[3]{(2 + i)^3} = 2 + i; \\
 \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} &= \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{8 - 12i - 6 - i} = \\
 &= \sqrt[3]{2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 i^2 - i^3} = \sqrt[3]{(2 - i)^3} = 2 - i,
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 + i + 2 - i = 4.$$

$$\begin{aligned}
 352. \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + x - 4 &= 0; \\
 x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + (x - 4) &= 0; \\
 (x - 4)(x^2 + 4x + 1) &= 0; \\
 x_1 = 4; x_{2,3} &= -2 \pm \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

XVII век

Гарриот, Томас (1560 — 1621), английский алгебраист, автор трактата „Практика аналитического искусства“, вышедшего уже после его смерти (1631). Ему были известны соотношения между коэффициентами и корнями уравнения.

$$353. \quad x^3 + x^2(b + c - d) + x(bc - bd - cd) - bcd.$$

$$354. \quad x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 13x - 52 = 0;$$

$$x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 13(x - 4) = 0;$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 13) = 0;$$

$$x_1 = 4; x_{2,3} = -2 \pm i3.$$

Жи́рар, Альберт (1590—1632), фламандский математик, автор книги „Новые открытия в алгебре“ (1629). Он признает уже отрицательные и мнимые корни и высказывает мысль, что всякое уравнение имеет столько корней, сколько единиц в наибольшем показателе при неизвестном.

$$\begin{aligned}
 355. \quad & x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 3x - 12 = 0; \\
 & x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 3(x - 4) = 0; \\
 & (x - 4)(x^2 + 4x + 3) = 0; \\
 & x_1 = 4; x_2 = -1; x_3 = -3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 356. \quad & x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x^2 - x - 3x + 3 = 0; \\
 & x^3(x - 1) + x^2(x - 1) + x(x - 1) - 3(x - 1) = 0; \\
 & (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3) = 0; x_1 = 1; \\
 & x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 0; \\
 & x^2(x - 1) + 2x(x - 1) + 3(x - 1) = 0; \\
 & (x - 1)(x^2 + 2x + 3) = 0; x_2 = 1; x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$357. \sqrt[6]{2000}.$$

Кеплер, Иоганн (1571 — 1630), знаменитый астроном, открывший законы движения планет, носящие его имя. Кеплер был также крупнейшим математиком своего времени. Он является одним из основателей современного исчисления бесконечно малых. Зад. 358 заимствована из сочинения „О доказательстве гармонических чисел“ (1619).

$$358. x^4 - 5x^2 + 5 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Стевин, Симон (1548 — 1620), голландский инженер, которого можно по справедливости считать изобретателем десятичных дробей (трактат „La Disme“, 1585).

$$359. 4x^7 - 2x^6 - 6x^5 + 9x^4. \quad 360. 1) \frac{6x^3}{y^2z^3}; 2) 3x^2yz^2.$$

$$361. \quad 1) \sqrt{6x^3};$$

$$2) \sqrt{6 \cdot x^3};$$

$$3) \sqrt{\sqrt{15x^4} + \sqrt{12x^3} + \sqrt{10x^3} + \sqrt{8x^2}}.$$

Последний пример упрощается:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x^2\sqrt{15} + 2x\sqrt{3x} + x\sqrt{10x} + 2x\sqrt{2}} = \\
 & = \sqrt{x(\sqrt{5x} + 2)(\sqrt{3x} + \sqrt{2})}.
 \end{aligned}$$

$$362. 10 + \sqrt{88}.$$

Упрощение:

$$10 + 2\sqrt{22}.$$

363.

$$x^6 - 3x^3 - 5 = 0;$$

$$x^3 = z; z^2 - 3z - 5 = 0.$$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

364.

$$x^3 - 6x - 40 = 0;$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 10x - 40 = 0;$$

$$x^2(x-4) + 4x(x-4) + 10(x-4) = 0; x_1 = 4;$$

$$x^2 + 4x + 10 = 0; x_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{6}.$$

Валлис, Джон (1616 — 1703), видный английский математик, главный труд „Arithmetica infinitorum“ (1655). В другом сочинении „Трактат по алгебре“ он первый сделал попытку геометрического представления мнимых величин. Валлис является одним из основателей анализа бесконечно малых.

365. Эту задачу можно решить несколькими способами вполне элементарно.

1-й способ. Если одна сторона прямоугольника x , то другая $p - x$, где p — полупериметр.

Площадь

$$x(p - x) = S,$$

или

$$x^2 - px + S = 0,$$

откуда

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - S}.$$

Очевидно, для действительных значений x необходимо:

$$\frac{p^2}{4} \geq S,$$

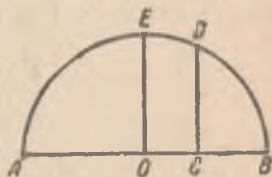
и наибольшее значение $S = \frac{p^2}{4}$.

При этом $x = \frac{p}{2}$.

2-й способ. Пусть одна сторона $\frac{p}{2} + a$, тогда другая $\frac{p}{2} - a$.

Площадь $\frac{p^2}{4} - a^2$. Ясно, что наибольшее значение будет при $a=0$, т. е. когда площадь равна $\frac{p^2}{4}$ и стороны между собой равны.

3-й способ. Примем сумму неравных сторон (полупериметр) прямоугольника за диаметр полукруга (черт. 82). Возьмем какие-нибудь два отрезка AC и CB . Если восставить перпендикуляр CD , то $AC \cdot CB = DC^2$, т. е. площадь прямоугольника со сторонами AC и CB равновелика квадрату со стороной CD . А так как наибольшая величина перпендикуляра (полухорды) есть радиус, то, очевидно, максимум площади прямоугольника достигается при совпадении точки C с центром полукруга, т. е. когда отрезки AC и CB равны между собой.



Черт. 82.

Сборник „Чародей-математик“ издан в Кельне в 1651 г. и содержит ряд довольно интересных задач типа „математических развлечений“.

366. Задача имеет два решения:

I	II	III
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

7 переливаний

I	II	III
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

8 переливаний

I — сосуд в 8 единиц объема, II — в 5 и III — в 3 единицы.

367. Очевидно, людей на свете больше, чем волос на голове у одного человека. Пусть наибольшее число волос n . Отберем

n человек с различным числом волос от одного до n , тогда у $n + 1$ -го человека будет n волос или меньше.

Декарт, Рене (1596—1650), знаменитый французский философ и математик; творец координатного метода. Его трактат „Геометрия“ вышел в 1637 году. Декарт способствовал успехам теории уравнений и один из первых стал обозначать неизвестные последними буквами латинского алфавита, отдавая предпочтение букве z . Его имя присвоено всем известному „правилу знаков“ и алгебраической кривой 3-го порядка (так называемый „декартов лист“). Декарту принадлежит так называемый способ неопределенных коэффициентов, имеющий различные применения.

$$\begin{aligned} 368. \quad & y^2(y-8) - (y-8) = 0; \\ & (y-8)(y^2-1) = 0; \\ & y_1 = 8; y_{2,3} = \pm 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 369. \quad & y^3 - 2y^2 - 7y^2 + 14y + 12y - 24 = 0; \\ & y^2(y-2) - 7y(y-2) + 12(y-2) = 0; \\ & (y-2)(y^2-7y+12) = 0; \\ & y_1 = 2; y_2 = 4; y_3 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 370. \quad & x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 76x + 30x - 120 = 0; \\ & x^3(x-4) - 19x(x-4) + 30(x-4) = 0; x_1 = 4. \\ & x^3 - 19x + 30 = 0; \\ & x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30 = 0; \\ & x^2(x-3) + 3x(x-3) - 10(x-3) = 0; x_2 = 3. \\ & x^2 + 3x - 10 = 0; x_3 = 2; x_4 = -5. \end{aligned}$$

Бартолинус, Эразмус (1625—1698), профессор математики в Копенгагене.

$$371. 4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29a^2 - 17a + 6.$$

$$\begin{aligned} 372. \quad \frac{(5-x)(x^2+12)}{\sqrt{x^2+12}} &= \frac{(5-x)(x^2+12)}{\sqrt{x^2+12} \cdot \sqrt{x^2+12}} = \\ &= (5-x) \cdot \sqrt{x^2+12}. \end{aligned}$$

373. Возводим в квадрат обе части уравнения:

$$\frac{z^2 + 3a^2}{4} + \frac{z^2 - 3a^2}{4} - 2\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{16}} = \frac{az^2}{b};$$

$$\frac{z^2}{2} - \frac{az^2}{b} = \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}};$$

$$\frac{z^4}{4} + \frac{a^2z^4}{b^2} - \frac{az^4}{b} = \frac{z^4}{4} - \frac{9a^4}{4};$$

$$4abz^4 - 4a^2z^4 = 9a^4b^2;$$

$$4bz^4 - 4az^4 = 9a^3b^2;$$

$$z^4 = \frac{9a^3b^2}{4b - 4a};$$

$$z^2 = \frac{3}{2} ab \sqrt{\frac{a}{b-a}};$$

$$z = \sqrt{\frac{3}{2} ab \sqrt{\frac{a}{b-a}}}.$$

Ферма́, Пьер (1601—1665), знаменитый французский математик, много сделавший для создания метода бесконечно малых, один из творцов современной теории чисел и теории вероятностей. Еще до опубликования „Геометрии“ Декарта Ферма́, написал „Введение в изучение плоских и телесных мест“. В этой работе, опубликованной лишь после смерти Ферма́, основные идеи аналитической геометрии развиты гораздо систематичнее, чем у Декарта.

374. Известно, что $S = \frac{a_1}{1-q}$, откуда

$$S - a_1 = \frac{a_1}{1-q} - a_1 = \frac{a_1}{1-q}, \text{ следовательно, } \frac{S}{S-a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

375. Ферма́ в письме к французскому математику Робервалю (1602—1675) от 4 ноября 1636 г. дал указываемое правило суммирования четвертых степеней чисел натурального ряда.

Известно, что сумма четвертых степеней от 1 до n выражается равенством:

$$S_4 = n^4 + (n-1)^4 + \dots + 2^4 + 1^4 =$$

$$= \frac{n}{5 \cdot 6} (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Отсюда

$$5S_4 = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Правая часть этого равенства должна тождественно равняться выражению, данному Ферма. Так как

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$\begin{aligned} (4n+2) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \\ = \frac{(2n+1)n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \\ = n(n+1)(2n+1) \left(\frac{n^2+n}{2} - \frac{1}{6} \right) &= \\ = n(n+1)(2n+1) \frac{3n^2+3n-1}{6}. \end{aligned}$$

Примечание. Сумму четвертых степеней последовательности чисел $1, 2, \dots, n$ можно вычислить, пользуясь тождеством:

$$n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1,$$

полагая последовательно

$$n = 1, 2, 3, \dots, n.$$

376. Это так называемая „теорема Ферма“.

Решение. Числа, кратные N , суть, очевидно:

$$N, 2N, 3N, \dots, (p-1)N;$$

делим их на p :

$$\begin{aligned} N &= q_1 p + r_1, \\ 2N &= q_2 p + r_2, \\ 3N &= q_3 p + r_3, \\ &\dots \dots \dots \\ (p-1)N &= q_{p-1} p + r_{p-1}. \end{aligned}$$

Перемножение дает:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \cdot N^{p-1} = \text{кр. } p + r_1 r_2 r_3 \dots r_{p-1}.$$

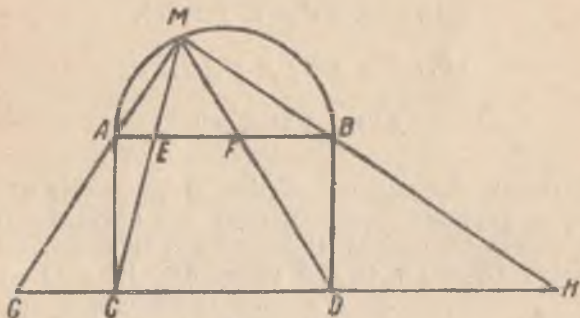
Но второе слагаемое суммы в правой части равенства есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)$ (ибо среди $p-1$ чисел $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$, меньших p , не может быть равных). Следовательно,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) (N^{p-1} - 1) = \text{кр. } p;$$

так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)$ на p не делится, то ясно, что

$$N^{p-1} - 1 \text{ делится на } p.$$

377. Пусть число N . Если одна часть x , другая $N-x$. Их произведение $x(N-x)$ должно быть наибольшим. Вопрос приводится к задаче 365. Итак, $x = \frac{N}{2}$. Проверить это на числе 10.



Черт. 83.

378. Продолжим хорды MA и MB (черт. 83) до встречи в точках G и H с продолжениями CD . Угол M — прямой, следовательно, треугольники AGC и BDH подобны:

$$\frac{GC}{BD} = \frac{AC}{DH};$$

но

$$BD = AC,$$

следовательно,

$$2GC \cdot DH = 2AC^2 = CD^2.$$

Отрезки

$$GC, CD, DH$$

пропорциональны

$$AE, EF, FB,$$

поэтому

$$2AE \cdot BF = EF^2.$$

Но

$$AF + BE = AB + EF,$$

следовательно,

$$AF^2 + BE^2 + 2AF \cdot BE = AB^2 + EF^2 + 2AB \cdot EF,$$

или

$$AF^2 + BE^2 + 2AF \cdot BE = AB^2 + 2(AE \cdot BF + AB \cdot EF).$$

Тождество

$$(a + c)(b + c) = ab + (a + b + c)c,$$

при

$$AE = a, EF = c, FB = b,$$

дает:

$$AF \cdot BE = AE \cdot BF + AB \cdot EF,$$

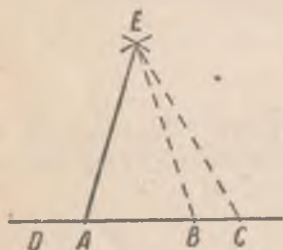
откуда

$$AF^2 + BE^2 = AB^2.$$

379. Строд, Томас (конец XVII века) упоминает об этом построении, не указывая, впрочем, кому оно принадлежит.

На произвольной прямой откладываем от произвольной точки A данные линии $AB = a$ и $AC = b$ (черт. 84). На этой же прямой

в обратном направлении откладываем от точки B длину $BD = b$ и радиусом, равным b , описываем дуги из точек D и C . Прямая AE , соединяющая точку пересечения этих дуг с точкой A , и будет средней пропорциональной между a и b . Действительно: равнобедренные треугольники AEB и AEC подобны, следовательно



Черт. 84.

$$a : AE = AE : b.$$

Паскаль, Блэз (1623—1662), знаменитый французский математик, известный своими исследованиями свойств циклоиды, а также конических сечений. В его маленьком трактате „Опыт о конических сечениях“ находится замечательная лемма, известная под названием „паскалева шестиугольника“. Вместе с Ферма́ он разделяет славу создания теории вероятностей.

380. В своем трактате „Особенности делимости чисел“ Паскаль говорит: пусть при делении 10 на число A получается остаток r_1 , при делении $10r_1$ на A — остаток r_2 , при делении $10r_2$ на A — остаток r_3 и т. д. Если данное число (например, четырехзначное) будет $MCDU$, где M, C, D и U — цифры тысяч,

сотен, десятков и единиц, то общий признак делимости этого числа на A следующий: если

$$U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3$$

делится на A , то на A делится и число $MCDU$.

Действительно, пусть

$$10 = Aq_1 + r_1,$$

$$10r_1 = Aq_2 + r_2,$$

$$10r_2 = Aq_3 + r_3,$$

тогда

$$\begin{aligned} & U + Dr_1 + Cr_2 + Mr_3 = \\ & = U + D(10 - Aq_1) + C(10r_1 - Aq_2) + M(10r_2 - Aq_3) = \\ & = U + 10D + 10C(10 - Aq_1) + 10M(10r_1 - Aq_2) - \text{кр. } A = \\ & = U + 10D + 100C + 100M(10 - Aq_1) - \text{кр. } A = \\ & = U + 10D + 100C + 1000M - \text{кр. } A. \end{aligned}$$

Баше де Мезирак (1581 — 1638), французский математик, известный своим способом решения неопределенных уравнений первой степени в целых числах, автор комментариев к „Арифметике“ Диофанта и популярнейшего „Сборника математических развлечений“ „Recueil de Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres“ (1-е издание вышло в Лионе в 1613 г.).

331. Решение. Дети переправляются на другой берег. Один из них там остается, а другой возвращается с лодкой. Потом переезжает один солдат и посылает обратно лодку с мальчиком. Снова дети едут на противоположный берег и т. д., пока вся рота не будет перевезена.

382. Решение задачи основано на свойствах троичной системы счисления, с помощью которой можно выражать любые числа; так как число $40 = 27 + 9 + 3 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3 + 1$, то помощью четырех гирь весом в 27, 9, 3 и 1 фунт, как нетрудно убедиться проверкой, можно отвесить любой груз в пределах сорока фунтов. Достаточно взять любой груз и выразить его по троичной системе: например,

$$23 = 27 - (3 + 1); \quad 31 = 27 + 3 + 1$$

и т. д.

383. Вопрос приводится к системе уравнений:

$$x - y - z = 2,$$

$$3y - x - z = 4,$$

$$7z - x - y = 8,$$

откуда

$$x = 13; y = 7; z = 4.$$

Озанам, Жак (1640 — 1717), французский математик, автор „Курса математики“ в 4 томах и сборника задач „Математические и физические развлечения“ (2-е издание вышло в 1788 г.).

384. Задача сводится как будто к определению числа перестановок из семи элементов:

$$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040.$$

Так решил и Озанам, но он ошибся. Озанам рассматривает все места как совершенно различные. И это было бы правильно, если бы семь человек сидели, скажем, на одной длинной скамейке с одной стороны стола, предполагая последний прямоугольной формы. Но если они усаживаются кругом стола (хотя бы и прямоугольного, а не круглого), т. е. так, что последний из усевшихся оказывается соседом первого, то относительное положение обедающих не изменится, если по данному знаку каждый из них пересядет на соседний стул вправо. Так как гости могут подобным образом пересаживаться шесть раз вправо, то Озанам, считая их за различные, нашел семь прямых перемещений, тогда как в действительности здесь будет только одно круговое. Следовательно, число обедов должно сократиться до 720. Но если принять во внимание, что вместо пересаживания вправо все могли бы пересестись влево, то число различных перемещений уменьшится вдвое, т. е. будет равно 360. Это и есть правильное решение задачи. Озанам высчитал, что гости должны обедать вместе около 14 лет. Оказывается, что в действительности им для этой цели пришлось бы собираться ежедневно только в течение одного года.

385. Так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ и это составляет 26 000,

то $\frac{1}{12}$ равна 2 000, следовательно, первый дает 12 000, второй 8 000, а третий 6 000 ливров.

Лейбниц, Готфрид Вильгельм (1646 — 1716), знаменитый философ и математик. Лейбница наряду с Ньютоном часто называют автором анализа бесконечно малых. Это верно в том смысле, что эти гениальные ученые систематизировали идеи и результаты, полученные их предшественниками, и, введя

единообразие в методы и обозначения анализа, создали целостный, практически удобный и мощный аппарат. Они также обогатили анализ рядом новых важнейших достижений. Многие символические обозначения Лейбница удержались в науке до сих пор, так например, знаки интеграла и дифференциала принадлежат ему. Он работал по исследованию свойств кривых (например, цепной линии), по разложению функций в ряды, наконец, от него берет начало идея определителей.

$$386. 1) m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1)(m^2 + 1).$$

Пусть $m = 2k$, т. е. четно. Тогда $m^2 \pm 1 = 4k^2 \pm 1$; если m не делится на 5, то возможны формы этого числа $5n \pm 1$ и $5n \pm 2$; m^2 дает $25n^2 \pm 10n + 1$ и $25n^2 \pm 20n + 4$, т. е. $m^2 = \text{кр. } 5 + 1$ или $\text{кр. } 5 - 1$, следовательно, либо $m^2 + 1$, либо $m^2 - 1$ делится на 5. Аналогично убедимся в этом при m нечетном.

$$2) m^7 - m = m(m^6 - 1) = m(m^3 - 1)(m^3 + 1).$$

Пусть $m = 2k$, т. е. четное. Для m , если оно не делится на 7, возможны формы $7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$. Но m^3 во всех этих случаях будет равно $\text{кр. } 7 \pm 1$, следовательно, либо $m^3 - 1$, либо $m^3 + 1$ делится на 7.

$$\begin{aligned} 887. \quad \sqrt{1+i\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2i\sqrt{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{\frac{3}{4}}} = \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2i\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, сумма равна:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}.$$

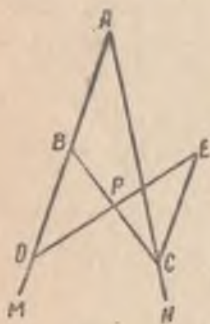
Ньютон, Исаак (1642 — 1727), величайший ученый всех времен, профессор университета в Кембридже и с 1703 г. президент Лондонского королевского общества. Главнейшим трудом его являются „Математические начала естественной

философии" (1687), разделенные на три книги. В первой излагаются общие начала механики и законы движения. Во второй исследуются вопросы, связанные главным образом с сопротивлением движению. В третьей изложены законы планетных движений. Давши математическое выражение закона тяготения, Ньютон заложил таким образом фундамент небесной механики. Огромное значение для истории математики имеют работы Ньютона по созданию исчисления бесконечно малых (см. выше заметку о Лейбнице). Кроме того, он исследовал свойства различных кривых и внес усовершенствования в теорию уравнений. Перу Ньютона принадлежит трактат „Всеобщая арифметика" (1707), где символика и самое изложение мало чем отличаются от современных.

$$388. 1) \frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \frac{a^2b}{c}.$$

$$2) y^2 + 2ay - \frac{a^2}{2}.$$

389. От данной точки P (черт. 85) проводится к одной из данных прямых AB какая-либо прямая PD и продолжается в сторону другой прямой AC до точки E так, чтобы отношение PE к PD равнялось данному. Пусть EC параллельна AD , тогда, проведя CPB , получим $PC:PB = PE:PD$.



Черт. 85.

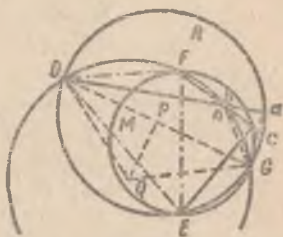
390. Решение Ньютона. Даны прямые AB , AC и BC (черт. 86) и требуется расположить данный треугольник DEF так, чтобы вершины его D , E и F лежали соответственно на прямых AB , AC , BC . Опиши около DE , DF и EF три сегмента DRE , DGF , EMF , вмещающие углы, соответственно равные BAC , ABC , ACB . Эти сегменты надо описывать по такую сторону прямых DE , DF и EF , чтобы последовательность букв $DRED$ была одинаковой с последовательностью $BACB$; $DGFD$ — одинаковой с $ABCA$ и $EMFE$ — с $ACBA$. Эти сегменты дополняются до кругов. Пусть первые два пересекаются в точке G , и пусть P и Q их центры. Проведя PG и PQ , возьми Ga так, чтобы

$$Ga:AB = PG:PQ.$$

Из точки G радиусом Ga опиши круг, пересекающий первый круг DRE в точке a . Проведи затем aD , пересекающую второй круг DFG в точке b , и aE , пересекающую третий круг в точке c . Остается построить фигуру $ABCdef$, равную и подобную фигуре $abcDEF$, и задача будет решена. Действительно, проведем Fc , пересекающую aD в некоторой, пока еще неопределенной, точке n , и соединим aG , bG , QG , QD , PD . По построению угол $EaD = CAB$, а угол $acF = ACB$, поэтому треугольники anc и ABC имеют соответственно равные углы. Следовательно, угол anc или FnD равен углу ABC , а следовательно, и углу FoD , что показывает, что точка n совпадает с точкой b .



Черт. 86а.



Черт. 86б.

Угол GPQ , равный половине угла GPD при центре, равен углу GaD при окружности, и угол GQP , равный половине центрального угла GQD , равен дополнению до двух прямых угла Gbd при вершине, следовательно равен углу Gba , и треугольники GPQ и Gab между собой подобны, откуда $Ga:ab = GP:PQ = Ga:AB$ (по построению). Поэтому $ab = AB$ и треугольники abc и ABC , о которых доказано, что они подобны, вместе с тем и равны. Так как сверх этого вершины D , E и F треугольника DEF лежат на сторонах ab , ac , bc треугольника abc , то можно построить фигуру $ABCdef$, равную и подобную фигуре $abcDEF$, и задача будет решена.

XVIII век

Маклорен, Колин (1698—1746), профессор университета в Эдинбурге, математик, известный своими трудами по высшему анализу („Трактат о флюксиях“) и особенно исследо-

ваниями свойств кривых, главным образом третьего порядка. Его имя обычно связывают с разложением функций в ряд по степеням аргумента, хотя ряд этот был известен и до него, и был им только впервые опубликован. Его трактат по алгебре, из которого мы приводим 4 задачи, богат содержанием и мало чем отличается от учебных курсов алгебры позднейшего времени со стороны символики.

391. Решение Маклорена Он складывает почленно все три уравнения и получает $3x = 36$, откуда $x = 12$, тогда из 2-го $y = 8$ и из 3-го $z = 6$.

$$\begin{aligned}
 392. \quad \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16} + 2 + \sqrt[3]{4}} = \\
 &= \frac{\sqrt[3]{20} (2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4})} = \frac{2\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{80}}{2} = \\
 &= 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{10}.
 \end{aligned}$$

393. Пусть обедало x человек. Легко составить уравнение

$$\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10,$$

откуда

$$x^2 - 2x = 35.$$

Маклорен решает так:

$$x^2 - 2x + 1 = 36$$

$$(x-1)^2 = 36; \quad x-1 = \pm 6; \quad x_1 = 7 \text{ или } x_2 = -5.$$

Второй корень не годен.

394. Пусть

$$x^3 = z, \quad z^3 - 19z - 216 = 0.$$

Решение Маклорена:

$$z^3 - 19z + \frac{361}{4} = 216 + \frac{361}{4} = \frac{1225}{4},$$

$$z - \frac{19}{2} = \pm \frac{35}{2}; \quad z = \frac{19 \pm 35}{2} = 27 \text{ или } -8,$$

следовательно, $x (= \sqrt[3]{z})$ равен 3 или -2 .

Ламберт, Иоганн Генрих (1728—1777), выдающийся немецкий математик, член Берлинской и Мюнхенской академий, глубокий знаток геометрии, работавший по исследованию свойств конических сечений и теории перспективы. Ему наука обязана доказательством несоизмеримости числа π .

395. Если $10a + b$ — нечетное число, то $(10a + b)^2$ тоже нечетно, а $(10a + b)^2 - 1 = (10a + b - 1)(10a + b + 1)$. Оба эти множителя четны, при чем, если первый есть $2k$, то второй $2k + 2$, следовательно произведение имеет вид $2k \cdot 2(k + 1) = 4 \cdot k(k + 1)$, но из двух последних множителей один также непременно четный.

396. Указание. Всякий нечетный квадрат либо кратен 9, либо дает при делении на 9 в остатке 1, 4 или 7. Если отнять единицу, то получится число либо кратное 9, либо при делении на 9 дающее в остатке 3 или 6. Во всех этих случаях оно будет делиться на 3. С другой стороны, всякое нечетное число имеет вид $4n \pm 1$. Его квадрат $16n^2 \pm 8n + 1$. Если отнять единицу, получим число $8n (2n \pm 1)$, т. е. кратное 8, следовательно, будучи, кроме того, кратным 3, оно разделится на 24.

Вариньон, Пьер (1654—1722), в свое время мало оцененный выдающийся французский математик, один из первых ознакомивший Францию в своих сочинениях с анализом бесконечно малых. Главнейшие труды его относятся к механике, где ряд теорем носит его имя. В трактате „Новая механика“ он применяет теорию моментов к определению условий равновесия всех простых машин.

397. Из трактата „Проект новой механики“. Проектируем стороны AB , BC и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ (черт. 87) на прямую xy .

$$\text{пр. } AB = ab;$$

$$\text{пр. } BC = bc;$$

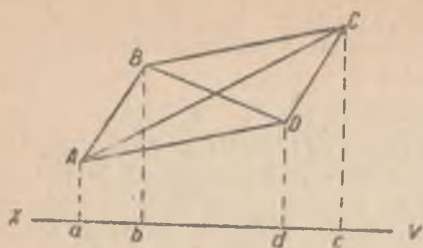
$$\text{пр. } AB + \text{пр. } BC = ab + bc = ac;$$

но

$$\text{пр. } AC = ac,$$

следовательно,

$$\text{пр. } AB + \text{пр. } BC = \text{пр. } AC.$$



Черт. 87.

Аналогично:

$$\text{пр. } AB = ab;$$

$$\text{пр. } AD = ad;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \text{пр. } AD - \text{пр. } AB &= \\ &= ad - ab = bd = \text{пр. } BD. \end{aligned}$$

Клеро, Алексис Клод (1713 — 1765), знаменитый французский математик,

18-летним юношей был избран в члены Парижской академии наук за свои исследования о кривых линиях двойкой кривизны. Его курсы алгебры и геометрии, особенно последний, и сейчас представляют немалый интерес.

398. Эта задача, впервые опубликованная в „Алгебре“ Клеро, перешла на страницы учебников под названием задачи об источниках света. Пусть расстояние между источниками A и B равно d . Расстояние искомой точки C (равноосвещенной) от источника A есть x . Тогда расстояние до другого источника $B = d - x$.

Из физики известно, что сила света обратно пропорциональна квадрату расстояния освещаемого предмета от источника света. Если 1-й источник силой в a свечей, а 2-й в b свечей, то

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2},$$

откуда

$$x^2(a-b) - 2adx + ad^2 = 0,$$

и

$$x = d\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{a-b},$$

так что

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

$$x_2 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Задача эта весьма удобна для исследования. Ограничимся указанием его хода:

при $d > 0$ 1) $a > b$

2) $a < b$

3) $a = b$

при $d = 0$ 1) $a \neq b$

2) $a = b$

Симсон, Роберт (1687 — 1768), английский математик, профессор университета в Глазго, работавший в области геометрии.

399. Дан треугольник ABC (черт. 88). Из точки M опускаем перпендикуляры MC_1 , MB_1 , MA_1 на его стороны. Соединим B_1 с A_1 , B_1 с C_1 и точку M с вершинами A и C . Так как точки M , A , B , C лежат на одной окружности, то $\angle MAC_1 = \angle MCB$, из чего ясно, что $\angle 1 = \angle 2$. Точки C , M , B_1 , A_1 лежат на одной окружности и потому $\angle 1 = \angle CB_1A_1$;

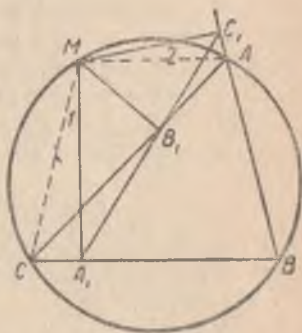
так как и точки C_1 , M , B_1 , A лежат на одной окружности, то $\angle 2 = \angle AB_1C_1$. Из равенства углов AB_1C_1 и A_1B_1C заключаем, что B_1A_1 и B_1C_1 составляют одну прямую. Идет место и обратное предложение.

Таким образом описанная около треугольника окружность есть геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что основания перпендикуляров, проведенных из любой точки окружности к сторонам треугольника, лежат на одной прямой, которую принято называть „прямой Симсона“.

Моавр, Абрагам (1667—1754), французский математик, ученик Озанама, живший долгое время в Англии и бывший членом Лондонского королевского общества. Работал в области теории рядов и теории вероятностей. Ввел в алгебру так называемые возвратные уравнения. С его именем в элементарной алгебре связаны формулы, касающиеся возведения в степень и извлечения корня из комплексных количеств. Они имеют применение в тригонометрии и при решении двучленных уравнений.

400. Возьмем уравнение 5-й степени:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$



Черт. 88.

Ясно, что при $x = -1$ имеем:

$$-a + b - c + c - b + a = 0,$$

следовательно, $x = -1$ есть корень уравнения. Если левую часть уравнения разделить на $x + 1$, то получим:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (c + a - b)x^2 + (b - a)x + a.$$

Гольдбах, Христиан (1690—1764), немец по происхождению, живший и работавший в России, секретарь и член Петербургской академии наук, в изданиях которой помещен ряд его мемуаров по математике. Большой исторический интерес представляет его ученая переписка с Эйлером.

401. Будем давать b различные значения, начиная с единицы. Тогда искомая сумма представится в виде

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^4} + \dots$$

Давая a всевозможные значения, начиная с единицы, мы представим эту сумму так:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Таким образом весь ряд состоит из бесчисленного множества убывающих геометрических прогрессий. Сумма членов первой прогрессии равна $\frac{1}{1 \cdot 2}$, второй $\frac{1}{2 \cdot 3}$ и т. д. Следовательно, ряд напишется так:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$\text{но } \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ и т. д.,}$$

следовательно, ряд перепишется:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

Сумма первых n его членов равна $1 - \frac{1}{n+1}$, что в пределе при $n = \infty$ даст единицу.

Чева, Джиованни (1648—1734), итальянский геометр и инженер-гидравлик, доказавший в своем трактате „De lineis

rectis se invicem secantibus, statica constructione" теорему задачи 402, основываясь на началах статики.

402. Так как треугольники AOB и AOC имеют общее основание AO , то площади их относятся, как их высоты или как отрезки BA_1 , CA_1 ; аналогичное имеет место для треугольников BOC и BOA и треугольников COA и COB . Поэтому

$$AOB:AOC=BA_1:CA_1,$$

$$BOC:BOA=CB_1:AB_1,$$

$$COA:COB=AC_1:BC_1.$$

Перемножение дает:

$$1:1=AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1:AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1,$$

откуда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1=AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1.$$

403. Автор этой книги — английский математик Chapple. Она вышла в 1746 г.

Известно, что $R=\frac{abc}{4\Delta}$ и $r=\frac{\Delta}{p}=\frac{2\Delta}{a+b+c}$, следовательно-

$$\text{но, } R \cdot r = \frac{abc}{2(a+b+c)}.$$

Лежандр, Адриан Мари (1752—1833), знаменитый французский математик, написавший ряд капитальных трудов в области интегрального исчисления, теории чисел. Ему принадлежит идея и первая разработка приемов вычисления вероятнейших результатов совокупности наблюдений известных в науке под именем „способа наименьших квадратов“. В 1794 г. вышло классическое руководство „Элементы геометрии“, которое обычно кладется в основу систематических курсов элементарной геометрии.

Со стороны применяемых им методов характерен отказ от метода пределов, который Лежандр считал неподходящим в изложении начал науки. Со стороны формы доказательств следует отметить уклонение от манеры Евклида и широкое пользование аналитическим аппаратом.

404. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ (черт. 89) будут $AC=x$; $BD=y$. По теореме Гиппарха, назы-



Черт. 89.

ваемой также теоремой Птолемея, имеем:

$$xy = ac + bd.$$

Кроме того:

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}},$$

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Если радиус описанного круга будет R , то по отношению к треугольнику ABC (со сторонами a , b и x) имеем:

$$R = \frac{abx}{\sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a+x-b)(b+x-a)}} =$$

$$= \frac{abx}{\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - x^2)[2ab - (a^2 + b^2 - x^2)]}} =$$

$$= \frac{abx}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}}.$$

Подстановка значения x дает:

$$R = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}},$$

но площадь $\triangle ABC = \frac{abx}{4R}$ и $\triangle ADC = \frac{cdx}{4R}$, следовательно,

*) Это равенство можно доказать так. Площадь $\triangle ABD = \frac{ady}{4R}$, а площадь $\triangle BCD = \frac{bcy}{4R}$ (см. задачу 256). Отсюда площадь $ABCD = \frac{(ad + bc)y}{4R}$.

Точно так же площадь $\triangle ABC = \frac{abx}{4R}$, площадь $\triangle ACD = \frac{dcx}{4R}$ и площадь

$$ABCD = \frac{(ab + cd)x}{4R}.$$

Сравнивая оба полученных для площади $ABCD$ выражения, найдем, что

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

площадь четырехугольника $ABCD$ равна $S = \frac{1}{4R} \cdot (ab + cd) x$.

Подставляя сюда значения x и R , найдем:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}.$$

Полагая полупериметр $\frac{a+b+c+d}{2}$ равным p , окончательно найдем:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Это замечательное соотношение было известно еще индусам. Полагая $d=0$, найдем известную формулу Герона для площади треугольника $\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Эйлер, Леонард (родился в Базеле в 1707 г., умер в Петербурге в 1783 г.), швейцарец по происхождению, один из величайших математиков, необыкновенно плодовитый и решавший труднейшие проблемы с изумительной легкостью и виртуозностью. Ученая деятельность его тесно связана с Петербургской академией наук, издания которой украшались мемуарами Эйлера, самого неугомимого из ее членов. Эйлер прожил в России в общей сложности более 30 лет. Теория чисел, учение об уравнениях, геометрия, тригонометрия, анализ бесконечно малых, механика, астрономия в равной мере обязаны гению Эйлера, все труды которого поражают богатством и глубиной идей, разнообразием методов и преобразований, остроумием и оригинальностью доказательств и множеством удачных обозначений, навсегда закрепившихся в науке. Перу его принадлежит прекрасный учебник „Полное введение в алгебру“, 1770 г.

$$405. \frac{(8-5\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{9-8} = 4 + \sqrt{2}.$$

406. Возведя в квадрат получаем, что $c + dx = (a + bx)z^2$, откуда

$$x = \frac{c - az^2}{bz^2 - d},$$

$$a + bx = \frac{bc - ad}{bz^2 - d},$$

$$\text{следовательно, } y = (a + bx)z = \frac{(bc - ad)z}{bz^2 - d}.$$

407. Возведя в квадрат получаем, что

$$a^2 + bx + cx^2 = a^2 + 2axz + x^2z^2,$$

откуда

$$x = \frac{b - 2az}{z^2 - c},$$

следовательно, $a + xz = \frac{bz - az^2 - ac}{z^2 - c}.$

408. Пусть искомое число x , тогда по условию

$$2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$$

или $x^3 = \frac{343}{8}$, откуда $x = \frac{7}{2}.$

409. Пусть купцов было x . Каждый внес $100x$, и весь капитал $100x^2$. Прибыль на капитал $2x^3 = 2662$, откуда $x^3 = 1331$, следовательно, $x = 11$.

410. Ответ: 4 294 967 295 пфеннигов.

411. Пусть $y = ax$, т. е. $(ax)^x = x^{ax}$ или $ax = x^a$; $a = x^{a-1}$, откуда $x = a^{\frac{1}{a-1}}$, тогда $y = a^{\frac{a}{a-1}}$; если положить $\frac{1}{a-1} = n$, получим $a = \frac{n+1}{n}$, следовательно,

$$x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ и } y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$



Черт. 90.

412. Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность центра O , радиуса R (черт. 90). Точка I — центр вписанной окружности, ее радиус $IE = r$. Линия DD_1 — диаметр, перпендикулярный к BC .

Проведем через центры O и I диаметр FG описанной окружности, соединим точку C с точками D , D_1 и докажем, что расстояния DC и DI равны. Действительно, так как центр вписанной окружности лежит в пересечении биссектрис, то $\angle CID =$

$= \frac{A+C}{2}$, $\angle ICD = \frac{A+C}{2}$, следовательно, $DC = DI$. Прямоугольные треугольники AEI и D_1CD подобны, поэтому

$$IA:r = 2R:CD = 2R:ID,$$

или

$$IA \cdot ID = 2R \cdot r,$$

но

$$IA \cdot ID = IF \cdot IG = (R + OI)(R - OI),$$

следовательно,

$$R^2 - OI^2 = 2R \cdot r,$$

откуда

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

413. Пусть числа простые с N_2 и меньшие N_2 суть

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, N_2 - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1 \alpha &= \text{кр. } N_2 + r_1 \\ N_1 \beta &= \text{кр. } N_2 + r_2 \\ &\dots \dots \dots \\ N_1 (N_2 - 1) &= \text{кр. } N_2 + r_k. \end{aligned}$$

Перемножение дает:

$$N_1^k \cdot \alpha \cdot \beta \dots (N_2 - 1) = \text{кр. } N_2 + r_1 r_2 \dots r_k$$

и так как $r_1 \cdot r_2 \dots r_k = \alpha \cdot \beta \dots (N_2 - 1) = A,$

то $A \cdot (N_1^k - 1) = \text{кр. } N_2.$

Но A первое с N_2 , следовательно, $N_1^k - 1$ должно делиться на N_2 .

414. Если p — число простое, то коэффициенты разложения $(x + a)^p$ суть целые числа, содержащие, кроме первого и последнего членов, множитель p . В знаменатели коэффициентов, представляющие факториалы от $2!$ до $p - 1!$, число p не входит, поэтому

$$m^p = [1 + (m - 1)]^p = 1 + \text{кр. } p + (m - 1)^p;$$

вычитая по m , имеем:

$$m^p - m = (m - 1)^p - (m - 1) + \text{кр. } p.$$

Далее

$$(m-1)^p = [1 + (m-2)]^p = 1 + \text{кр. } p + (m-2)^p,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} m^p - m &= (m-2)^p - (m-2) + \text{кр. } p = \dots \\ \dots &= 1^p - 1 + \text{кр. } p = \text{кр. } p. \end{aligned}$$

415. Вынем из многогранника несколько смежных между собой граней и назовем такую фигуру „открытым“ многогранником. Для него имеет место равенство:

$$A + 1 = F + S. \quad (1)$$

Действительно, оно справедливо для фигуры с одной гранью, представляющей многоугольник, имеющий n сторон. Для этого случая $F=1$, а число вершин S и число ребер A равно n , следовательно, равенство (1) справедливо. Покажем, что если оно будет справедливым для некоторого числа F граней, то оно останется таковым, если к открытому многограннику прибавить еще одну грань. Пусть эта грань будет m -угольник и приставлена к остальным p сторонам так, что эти p сторон совпадают со сторонами других граней, а $m-p$ сторон остаются свободными. Тогда ясно, что совпадут $p+1$ вершин последней грани с вершинами предыдущих граней. Обозначим число граней, ребер и вершин нового открытого многогранника через F' , A' , S' . Очевидно, будет

$$F' = F + 1,$$

так как в новом многограннике одной гранью больше. Подобно этому

$$A' = A + m - p$$

и, наконец, $S' = S + m - (p + 1)$.

Итак, если имеет место равенство

$$A + 1 = F + S,$$

то числа F , A' и S' также удовлетворяют ему, т. е.

$$A' + 1 = F' + S',$$

следовательно, равенство это всегда справедливо.

Допустим теперь, что в открытом многограннике существует только одно отверстие, получившееся от удаления одной

грани. Это удаление не уменьшает ни числа ребер, ни числа вершин, только число граней делается на единицу меньше. Поэтому в равенство $A + 1 = F + S$ надо подставить вместо F число $F - 1$, и получим $A + 2 = F + S$.

416. Возьмем тождество:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-d} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} \right) + \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a-d} \right).$$

Выполнив вычитания, освободимся от знаменателей:

$$(b-d)(a-c) = (b-c)(a-d) + (c-d)(a-b); \quad (1)$$

пусть теперь:

$$a = \frac{p+qi}{r+si}; \quad b = \frac{p_1+q_1i}{r_1+s_1i}; \quad c = \frac{-r+si}{p-qi}; \quad d = \frac{-r_1+s_1i}{p_1-q_1i}.$$

Сделав замену в тождестве (1), найдем:

$$\begin{aligned} & (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2) = \\ & = (pp_1 + qq_1 + rr_1 + ss_1)^2 + (pq_1 + rs_1 - qp_1 - sr_1)^2 + \\ & + (pr_1 + sq_1 - qs_1 - rp_1)^2 + (ps_1 + qr_1 - sp_1 - rq_1)^2. \end{aligned}$$

417. В правой части произвести указанные действия.

418. Эта задача находится в „Введении в анализ бесконечно малых“. Решение Эйлера: „Положим, население ежегодно увеличивалось на $\frac{1}{x}$ свою часть, тогда по истечении 200 лет получим:

$$\left(\frac{1+x}{x} \right)^{200} \cdot 6 = 1\,000\,000;$$

отсюда $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1\,000\,000}{6} \right)^{\frac{1}{200}}$, а потому

$$\lg \frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} \lg \frac{1\,000\,000}{6} = 0,0261092,$$

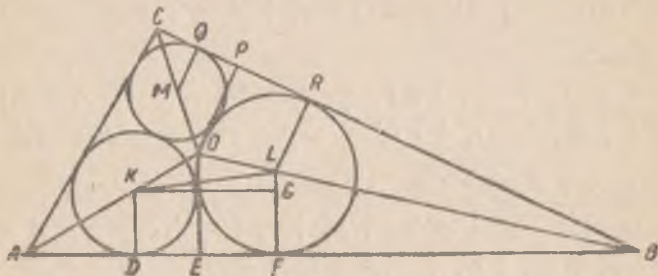
следовательно, $\frac{1+x}{x} = \frac{1\,061\,963}{1\,000\,000}$ и $1\,000\,000 = 61\,963x$, откуда

x приблизительно равно 16. Таково было бы размножение людей, если бы ежегодный прирост выражался одной шестнадцатой частью населения, что не может считаться слишком большим.

Если бы, однако, человеческий род возрастал в такой пропорции в течение 400 лет, то число людей должно было бы дойти до 166 666 666 666. Такого населения не мог бы выдержать весь земной шар“.

Мальфатти (1731—1807), итальянский геометр, имя которого присвоено разбираемой задаче, так как он первый решил ее.

419. Положим, задача решена. Пусть точка O — центр вписанной в треугольник окружности радиуса r (черт. 91). Радиусы кругов K и L обозначим соответственно через r_1 и r_2 . Из точек K, O, L



Черт. 91.

опустим на сторону AB перпендикуляры и таким путем найдем точки D, E, F . Пусть $AE = s$; $BE = t$; $AD = x$; $BF = y$. Если проведем $KG \parallel AB$, то $LG = r_2 - r_1$ и

$$KG = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Из подобия треугольников ADK и AEO имеем: $r_1 = \frac{xr}{s}$; точно

так же $r_2 = \frac{yr}{t}$ (из подобия треугольников BFL и BEO). Кроме того, $AB = AD + DF + FB$, следовательно, $x + y + 2\sqrt{r_1 r_2} = s + t$, или, подставляя значения $r_1 r_2$:

$$x + y + \frac{2r}{\sqrt{st}} \sqrt{xy} = s + t.$$

Если опустим перпендикуляры на сторону BC из точек L, O, M и положим $PC = u$ и $QC = z$, то получим аналогично:

$$y + z + \frac{2r}{\sqrt{tu}} \sqrt{yz} = t + u.$$

Точно так же и для третьей стороны AC :

$$z + x + \frac{2r}{\sqrt{us}} \sqrt{zx} = u + s.$$

Следовательно, получаются три уравнения с тремя неизвестными x, y, z . Сам Мальфатти дал решения чрезвычайно сложным путем:

$$\begin{aligned} 2x &= s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2} \\ 2y &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2} \\ 2z &= s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}. \end{aligned}$$

Но геометрическое построение величин x, y и z очень просто, потому что

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + s^2} &= OA, \\ \sqrt{r^2 + t^2} &= OB, \\ \sqrt{r^2 + u^2} &= OC. \end{aligned}$$

Построим

$$\frac{1}{2}(OA + OB + OC - s - t - u + r) = m,$$

тогда

$$\begin{aligned} x &= OA - m, \\ y &= OB - m, \\ z &= OC - m. \end{aligned}$$

Чисто геометрическое решение этой задачи дал Штейнер в 1826 г.

Маскерони, Лоренцо (1750–1800), итальянский математик, профессор университета в Павии.

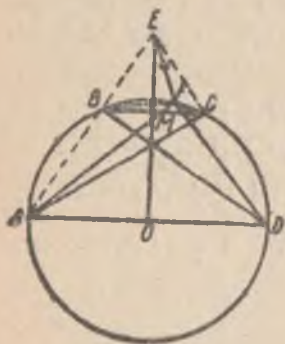
420. Описываем две концентрические окружности из центра O и делаем $AA_1 = BB_1$ (черт. 92). Тогда $\triangle AOA_1 = \triangle BOB_1$, поэтому $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$, откуда: $AO : OA_1 = AB : A_1B_1$.

Следовательно, если описать концентрические окружности радиусами a и b , сделать отрезок AB равным c и отрезки AA_1, BB_1 равными одному и тому же произвольному отрезку, то отрезок A_1B_1 и будет искомым.



Черт. 92.

Примечание. Если отрезок c так велик, что не может служить хордой окружности (OA), то берем отрезок $\frac{c}{n}$, где n — целое. При этом построится не x , а $\frac{x}{n}$.



Черт. 93.

421. Пусть радиус окружности есть единица. Из прямоугольного треугольника AOE (черт. 93), в котором $AE=AC=$
 $=\sqrt{3}$ и $AO=1$, найдем $OE=\sqrt{2}$.

Но $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$EO - OM = EM = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $BM = \frac{1}{2}$, то из прямоугольного треугольника BMF получаем:

$$BE = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

Пусть $AF=x$. В четырехугольнике $ABFD$ имеем: $AB=1$;
 $AD=2$; $BF=BE=\sqrt{3-\sqrt{6}}$; $FD=\sqrt{4-x^2}$; $BD=\sqrt{3}$;
 $AF=x$.

По теореме Гиппарха:

$$1. \sqrt{4-x^2} + 2. \sqrt{3-\sqrt{6}} = x \sqrt{3},$$

откуда по упрощении

$$x^2 - x\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} - (\sqrt{6} - 2) = 0;$$

положительный корень этого уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}}) = 1,5712\dots,$$

а длина четверти окружности радиуса, равного единице, будет:

$$\frac{\pi}{2} = 1,5707.$$

Погрешность меньше 0,0006 радиуса.

Жермен, Софи (1776—1831), женщина-математик. За мемуар о колебании упругих пластинок удостоена премии Парижской академии наук. Работала главным образом в области геометрии и теории чисел.

422. Выражение $n^4 + 4$ разлагается в произведение:

$$(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Лагранж, Жозеф Луи (1736—1813), один из величайших математиков всех времен, имя которого связано с успехами анализа бесконечно малых, высшей алгебры, теории рядов, теории чисел, механики и астрономии. Его по справедливости можно наряду с Эйлером считать творцом вариационного исчисления и аналитической механики. Его методы отличаются необычайной точностью и общностью, идеи — глубиной, приемы вычисления — изяществом. Изложение его, ясное и блестящее, может служить образцом для писателей-математиков. Сочинения его изданы в XIV томах под редакцией Серре и Дарбу. Первые семь томов содержат его специальные исследования, томы VIII—XIV посвящены его трактатам и переписке с различными учеными (Даламбером, Кондорсе, Лапласом и Эйлером).

423. Пусть разность чисел есть d , а самые числа $p - d$, p , $p + d$, где p имеет форму $6m \pm 1$, при чем $p - d$ и $p + d$ — нечетны, а d может быть только четным и будет иметь вид $6n \pm 2$ или $6n$.

1) Если $d = 6n + 2$ и $p = 6m + 1$, то простые числа будут:

$$6(m - n) - 1, 6m + 1, 6(m + n) + 3.$$

Этот случай невозможен, так как последнее из этих чисел — составное.

2) Если $d = 6n + 2$ и $p = 6m - 1$, числа будут:

$$6(m - n) - 3; 6m - 1, 6(m + n) + 1,$$

где первое число кратно 3 (если $m - n = 1$, то числа равны 3; $6n + 5$; $12n + 7$). Итак, d не может быть равно $6n + 2$.

3) Если $d = 6n - 2$ и $p = 6m + 1$, числа будут:

$$6(m - n) + 3; 6m + 1; 6(m + n) - 1,$$

где первое составное (если $m = n$, числа: 3, $6m + 1$, $12m - 1$) и при $p = 6m - 1$

$$6(m - n) + 1, 6m - 1, 6(m + n) - 3.$$

где третье число составное. Итак, d не может быть равным $6n \pm 2$ и равняется только $6n$, а при $p = 6m \pm 1$ числа будут:

$$6(m - n) \pm 1, 6n \pm 1, 6(m + n) \pm 1.$$

424. Произвести в левой части тождества указанные действия. $A^2 A_1^2, B^2 B_1^2, C^2 C_1^2$ пропадут.

425. Делим на x^2 :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0,$$

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0;$$

так как $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, то

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Это уравнение дает два корня y_1 и y_2 . Тогда $x + \frac{1}{x} = y_1$ дает x_1

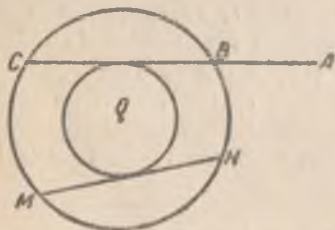
и x_2 , а $x + \frac{1}{x} = y_2$ дает x_3 и x_4 .

Безу, Этьен (1730—1783), французский математик, известный своими исследованиями по общей теории алгебраических уравнений (1779). Его именем называется способ решения системы уравнений в элементарной алгебре (способ произвольного множителя) и теорема о делимости целого многочлена на разность между главной буквой и корнем этого многочлена. Безу написал целый ряд учебных руководств, бывших в свое время весьма популярными.

426. Составляем уравнение $24x = 6(30 - x)$, откуда $x = 6$.

427. $x = 7$; $y = 10$; $z = 9$.

428. Если лошадь куплена за x пистолей, то он теряет при продаже $\frac{x^2}{100}$, следовательно, $x - \frac{x^2}{100} = 24$, откуда $x_1 = 40$, $x_2 = 60$.



Черт. 94

429. Проводим в данном круге (черт. 94) хорду MN , имеющую данную длину. Описываем из центра данного круга окружность, касающуюся MN , и из точки A проводим к этой окружности касательную AC . Она будет искомой секущей.

Этот прием решения — конструктивный.

Помощью приложения алгебры к геометрии задача решается так: пусть радиус круга r , $AK=a$, $CB=d$ (черт. 95). Тогда, обозначив секущую AC через x , имеем:

$$\begin{aligned}x(x-d) &= a(a+2r), \\x^2 - dx - a(a+2r) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a(a+2r)}.$$

Построение ясно.

Рейно, А., французский математик-педагог, автор целого ряда учебных руководств, принимавший участие в позднейшей обработке курсов Безу.

430. Пусть все наследство x франков. Первый по условию получает

$$100 + \frac{1}{10}(x-100) = \frac{1}{10}x + 90.$$

Остаток будет $\frac{9}{10}x - 90$. Второй получает

$$200 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}x - 290\right).$$

Но доли первого и второго равны, следовательно,

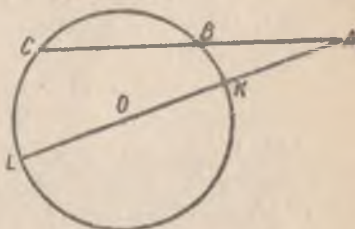
$$\frac{1}{10}x + 90 = 171 + \frac{9}{100}x,$$

откуда $x=8100$. Доля каждого при этом 900 франков, всех сыновей 9.

Франкер (1773—1849), французский математик, профессор „Faculté des sciences“ в Париже, автор „Полного курса чистой математики“, весьма распространенного и переведенного на русский язык.

431. bc есть полная сумма очков всех кучек. Если отнять карты, считающиеся за очко, то остаток будет x , но число этих карт равно $a-d$ без числа карт, считаемых больше чем за очко, т. е. $a-d-b$. Следовательно:

$$x = bc - (a-d-b) = b(c+1) + d - a.$$



Черт. 95.

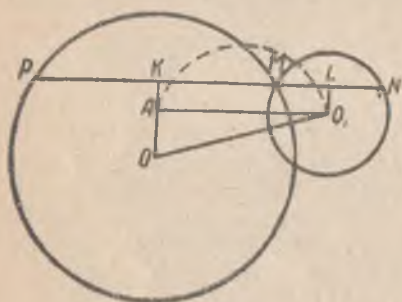
432. Полагаем $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$, откуда $ax + by = n$; для данного случая $d = 77 = 11 \cdot 7$, следовательно, $a = 11$ и $b = 7$. Получаем неопределенное уравнение $11x + 7y = 58$; $x = 7t - 3$; $y = 13 - 11t$; при условии решения в целых числах $t = 1$, $x = 4$ и $y = 2$. Следовательно, $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$.

433. Составляем уравнение $\frac{800}{x+3} = \frac{800}{x} - 60$, где x — число участников в платеже. $x^2 + 3x = 40$, откуда $x = 5$.

434. Получаем прогрессию $\div 2, 3, 4, \dots$. Сумма ее будет:

$$\frac{(2 + 13) 12}{2} = 90.$$

435. На линии центров OO_1 (черт. 96) как на диаметре опишем полуокружность и радиусом, равным половине данной длины, из центра O_1 делаем засечку, встречающую полуокружность в точке A .



Черт. 96.

Соединив точки O_1 и A , проводим через точку M пересечения данных окружностей линию NP параллельно AO_1 ; NP — искомая секущая. Действительно, если $OK \perp PM$ и $O_1L \perp MN$, то K есть середина хорды PM и L — середина хорды MN , следовательно, KL — половина PN , но KL равна AO_1 равна половине данной длины.

XIX век

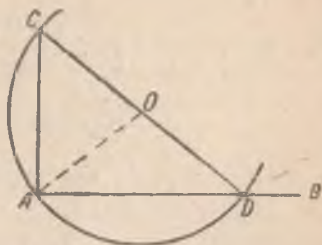
Лакруа, Сильвестр Франсуа (1765—1841), известный французский математик, в 17 лет бывший уже преподавателем, а в 1799 г. назначенный профессором Политехнической школы. В свое время заслуженной славой пользовался его трехтомный капитальный трактат по дифференциальному и интегральному исчислениям. Он является автором целого ряда пользовавшихся большой популярностью учебных руководств по элементарной математике.

436. Ответ: 678 ливров 5 су $9\frac{11}{16}$ денария.

437. Ответ: в $1\frac{1}{2}$ часа.

438. Искомое число километров равно $\frac{112 \cdot 17 \cdot 10}{29 \cdot 7}$.

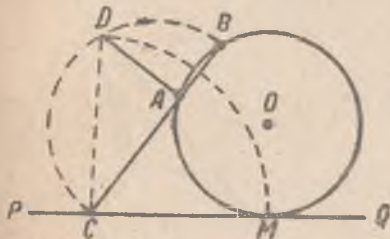
439. Из произвольной точки O вне прямой AB радиусом OA описываем окружность (черт. 97), точку D встречи ее с прямой AB соединяем с центром O и продолжаем до встречи с окружностью в точке C . Эту точку соединяем с точкой A . Линия AC будет перпендикуляром к AB .



Черт. 97.

440. Пусть дана прямая PQ и вне ее — точки A и B (черт. 98).

Соединив A и B , продолжим AB до встречи с прямой PQ в точке C . На BC опишем как на диаметре полуокружность. В точке A восставим перпендикуляр AD и радиусом DC из точки C опишем дугу, встречающую прямую PQ в точке M . Это и будет точка касания искомого круга к прямой PQ . Дальнейшее ясно.



Черт. 98.

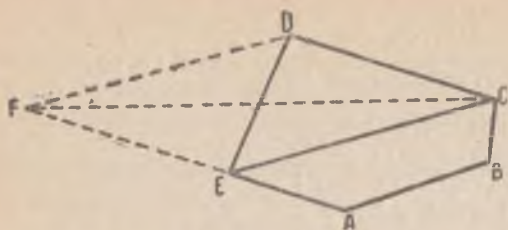
мой окружности, с одной стороны, должен лежать на перпендикуляре в середине AB , с другой, — на продолжении линии OB , следовательно, он лежит в их пересечении (точка O_1).

442. Дан неправильный пятиугольник $ABCDE$ (черт. 100). Проводим диагональ EC и через вершину D — линию FD параллельно EC до встречи с продолжением стороны AE . Четырехугольник $ABCF$ удовлетворяет задаче.

Мейер, Гиш, немецкий математик. Эта задача впервые дана в его „Sammlung geo-



Черт. 99.



Черт. 100.

в плоскости ABC . OB перпендикулярно AO .

Площадь грани

$$AOB = \frac{n \cdot m}{2} = \frac{c \cdot OE}{2},$$

откуда

$$OE = \frac{n \cdot m}{c}.$$

Из треугольника COE :

$$\begin{aligned} CE^2 &= l^2 + OE^2 = l^2 + \frac{n^2 m^2}{c^2} = \\ &= \frac{l^2 c^2 + n^2 m^2}{c^2}, \end{aligned}$$

но $c^2 = m^2 + n^2$, следовательно,

$$CE^2 = \frac{l^2 m^2 + l^2 n^2 + n^2 m^2}{c^2}.$$

Площадь

$$ABC = \frac{AB \cdot CE}{2},$$

следовательно, квадрат ее равен

$$\frac{AB^2 \cdot CE^2}{4} = \frac{c^2(l^2 m^2 + l^2 n^2 + n^2 m^2)}{4 \cdot c^2} = \frac{l^2 m^2}{4} + \frac{l^2 n^2}{4} + \frac{n^2 m^2}{4},$$

но квадрат площади грани

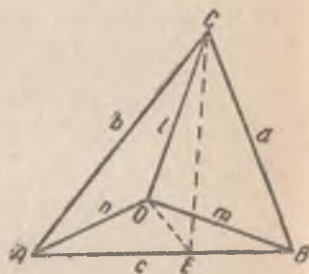
$$COB = \left(\frac{lm}{2}\right)^2 = \frac{l^2 m^2}{4},$$

квадрат площади грани

$$COA = \left(\frac{ln}{2}\right)^2 = \frac{l^2 n^2}{4}$$

metrischen Aufgaben* в 1807 г. Это, так сказать, теорема Пифагора в пространстве.

443. При указанных на черт. 101 обозначениях имеем: OE перпендикуляр к AB в плоскости AOB ; CE перпендикуляр к AB



Черт. 101.

и квадрат площади грани

$$AOB = \left(\frac{nm}{2}\right)^2 = \frac{n^2 m^2}{4},$$

откуда и получаем при сложении требуемое.

Люилль, Симон Антуан (1750—1840), известный французский математик, получивший в 1786 г. премию Берлинской академии наук за трактат „Элементарное изложение начал высших исчислений“, в котором он указывает, что соответственным образом развитый метод древних позволяет установить на строгих основаниях анализ бесконечно малых. Ему принадлежат прекрасное сочинение „Элементы геометрического анализа“ и ряд мемуаров по теории рядов и теории многоугольников и многогранников.

444. Площадь Q треугольника может быть выражена так:

$$Q = \frac{r_1(b+c-a)}{2},$$

откуда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{b+c-a}{2Q}; \quad (1)$$

аналогично

$$\frac{1}{r_2} = \frac{a+c-b}{2Q}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{a+b-c}{2Q}, \quad (3)$$

наконец

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2Q}; \quad (4)$$

сумма (1), (2) и (3) дает:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{a+b+c}{2Q} = \frac{1}{r}.$$

445. Перемножаем равенства (1), (2), (3) и (4) предыдущей задачи:

$$\frac{1}{r r_1 r_2 r_3} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{16Q^4};$$

но

$$Q = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

следовательно,

$$\frac{1}{rr_1r_2r_3} = \frac{16Q^2}{16Q^4} = \frac{1}{Q^2},$$

откуда $Q^2 = rr_1r_2r_3$.

Аллез, Билли, Пюиссан и Будро — французские математики, написавшие коллективный труд „Cours de Mathématiques“ для военных школ по поручению Беллавеня. Он вышел в 1813 г. и содержит арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, аналитическую геометрию и механику.

446. Средняя дальность $\frac{18 \cdot 632 + 25 \cdot 628 + 53 \cdot 620 + 4 \cdot 640}{100}$.

447. Называя число учеников 1-го, 2-го, 3-го и 4-го этажей x, y, z, u , имеем:

$$x + y + z + u = 600,$$

$$x = 2u,$$

$$y + z = x + u,$$

$$z = \frac{5}{7}y.$$

$2(x + u) = 600; x + u = 300 = 3u$, следовательно, $u = 100$ и т. д.

448. Если кирасирских лошадей x , то драгунских $x + 15$.

Стоимость первых $\frac{11250}{x}$ вторых $\frac{16000}{15+x}$. По условию

$$\frac{11250}{x} = \frac{16000}{x+15} + 50.$$

Авторы решают так: после упрощения

$$x^2 + 110x = 3375$$

прибавляют по 55²:

$$(x + 55)^2 = 6400,$$

откуда $x = 25$.

449. Ответ: $2a - 3b + 4c$. 450. а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$.

451. Если периметр вписанного n -угольника p , описанного одноименного P , а радиус круга r , то

$$P = \frac{2rpn}{\sqrt{4n^2r^2 - p^2}}.$$

452. Имеем: $x + y + z = 156,$ (1)

$$xy = 2028, \quad (2)$$

$$z^2 = x^2 + y^2; \quad (3)$$

отсюда

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 4056 = (156 - z)^2,$$

или

$$4056 = 156^2 - 312z,$$

откуда

$$z = 65;$$

следовательно,

$$x + y = 91.$$

По сумме и произведению находим:

$$x = 39; y = 52.$$

Гарнье, Жан Гильом (1766—1840), французский математик, педагог, профессор Политехнической школы, автор целого ряда курсов элементарной и высшей математики. Его „Элементы геометрии“ вышли в 1813 г.

453. Пусть (черт. 102) $EG = 2a$; $FG = 2c$; $OA = b$; $OB = d$; $CF = r = 1$.

$$\triangle EDI \sim \triangle OAI,$$

$$\triangle EDI \sim \triangle OBF,$$

следовательно,

$$\triangle OAI \sim \triangle OBF,$$

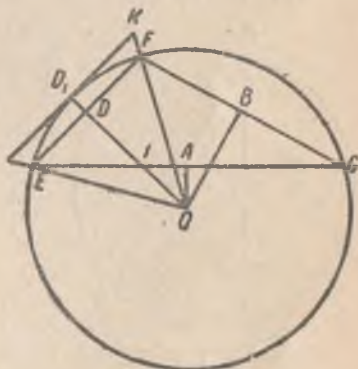
$$OB : OF = OA : OI,$$

откуда $OI = \frac{rb}{d} = \frac{b}{d}$

(так как $r = 1$) и

$$OB : FB = OA : AI,$$

откуда $AI = \frac{cb}{d} = \frac{cb}{d},$



Черт. 102.

$$EI = EA - AI = a - \frac{cb}{d} = \frac{ad - bc}{d}.$$

Кроме того:

$$OF:OB = EI:ED; OF:FB = EI:ID,$$

$$ED = \frac{OB \cdot EI}{OF} = \frac{d}{r} \cdot \frac{ad - bc}{d} = \frac{ad - bc}{r} = ad - bc,$$

$$ID = \frac{FB \cdot EI}{OF} = \frac{c}{r} \cdot \frac{ad - bc}{d} = \frac{c}{d} (ad - bc),$$

$$OD = OI + ID = \frac{b}{d} + \frac{c}{d} (ad - bc) = ac + bd,$$

потому что

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 &= 1, \\ ED &= ad - bc, \end{aligned}$$

следовательно,

$$EF = 2(ad - bc).$$

Если центр O — внутри треугольника EFG , то надо b изменить на $-b$; тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} OD &= ac - bd, \\ ED &= ad + bc \end{aligned}$$

и

$$EF = 2(ad + bc).$$

Если центр на стороне EG , то $b=0$, $EA=a=1$; $OD=c$ и $EF=2d$.

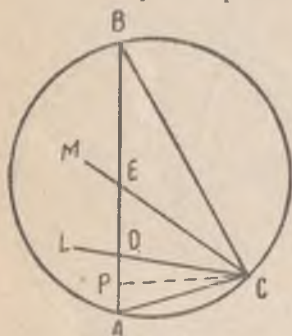
454. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (черт. 103) каждый из углов при основании AC вдвое больше угла B при вершине. Так как $A + B + C = 2d$ и $A = C = 3B$, то

$$7B = 2d \text{ и } B = \frac{2}{7}d. \text{ Дуга } AC =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{7}, \text{ т. е. } AC \text{ будет сторо-}$$

ной правильного вписанного в круг семиугольника. Пусть прямые CL и CM делят угол C на три равные части ACD , DCE , ECB . Треугольники ACD и ABC подобны и $CD=CA$. Опустим из C

перпендикуляр CP на AB . Пусть $AB=a$ и $AC=CD=x$. Тогда $a:x = x:AD$, следовательно, $AD = \frac{x^2}{a}$, $AP = \frac{AD}{2} = \frac{x^2}{2a}$.



Черт. 103.

Треугольник CEB равнобедренный, т. е. $EC = BE$. Треугольник ACE также равнобедренный ($AE = AC = x$). Тогда

$$CE = BE = AB - AE = a - x.$$

Но

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AE \cdot AP = 2AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AP,$$

или

$$(a - x)^2 = 2x^2 - 2x \cdot \frac{x^2}{2a},$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - \frac{x^3}{a},$$

и, следовательно, вопрос об отыскании стороны семиугольника x приведен к уравнению третьей степени:

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0.$$

Но с помощью циркуля и линейки, т. е. чисто геометрическим путем, эта задача неразрешима.

Гаусс, Карл Фридрих (1777—1855), знаменитый немецкий математик, особенно известный своими исследованиями по теории чисел, результаты которых изложены в его замечательном трактате „Disquisitiones Arithmeticae“ (1801). Гауссу принадлежит также первое строгое доказательство основного положения высшей алгебры, что всякое уравнение имеет по крайней мере один корень.

455. Пусть p — простое число, a — какое-нибудь число, меньшее p ; требуется показать, что при b , меньшем p , произведение ab не разделится на p . Возьмем ряд чисел $b, c, d, \dots$, из которых каждое меньше p , и допустим, что $ab, ac, ad, \dots$ делятся на p . Пусть b есть наименьшее из чисел $b, c, d, \dots$ и никакое другое число, меньшее b , не дает при умножении на a произведения, кратного p . $b < p$ и если разделить p на b , то в частном пусть будет m , а в остатке b_1 , т. е. $p = bm + b_1$ и $b_1 = p - bm$. Следовательно, $ab_1 = ap - abm$. Мы допустили, что ab кратно p , следовательно, abm кратно p , точно так же ap делится на p , в таком случае ab_1 должно делиться на p , следовательно, кроме чисел $b, c, d, \dots$ существует еще число b_1 , меньшее b , произведение которого на a делится на p , что противоречит предположению.

Коши, Огюст Луи (1789—1857), знаменитый французский математик, профессор Политехнической школы, факультета наук

и „Collège de France“. Он написал более семисот мемуаров по различным отделам анализа, геометрии, физики и астрономии. Ему обязана своим развитием теория функций комплексного переменного. При необычайной плодовитости и богатстве идей Коши не успевал детально обработать своих исследований, оставляя это на долю своих последователей. Заслуженной известностью пользуются его трактаты „Курс анализа“ и „О дифференциальном и интегральном исчислениях“.

456. 1) Полагаем

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Приводя к одному знаменателю, имеем:

$$Ax + A + Bx - B = 2,$$

$$x(A + B) + A - B = 2.$$

Раз левая и правая стороны равенства должны быть тождественно равны при произвольном x , то

$$A + B = 0,$$

$$A - B = 2,$$

следовательно,

$$2A = 2$$

и

$$A = 1; B = -1.$$

Таким образом:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

2) Пусть

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Тогда

$$2x = Ax + A + Bx - B,$$

или

$$2x = x(A + B) + A - B,$$

следовательно,

$$A + B = 2,$$

$$A - B = 0,$$

откуда

$$2A = 2$$

и

$$A = 1; B = 1.$$

Таким образом

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

457. Так как $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots$,

то
$$\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2} = \dots = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots}.$$

Извлекая корень, получим:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots}}.$$

458. Возьмем четыре комплекса, попарно сопряженных:

$$a + bi, a - bi, a_1 + b_1 i, a_1 - b_1 i.$$

Перемножая каждую пару сопряженных комплексов, найдем в произведении всех четырех

$$(a^2 + b^2) (a_1^2 + b_1^2).$$

Если помножить первый на третий и второй на четвертый, то общее произведение представится в виде:

$$[aa_1 - bb_1 + (ab_1 + ba_1)i] [aa_1 - bb_1 - (ab_1 + a_1b)i],$$

или
$$(aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + ba_1)^2,$$

следовательно,

$$(a^2 + b^2) (a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 - bb_1)^2 + (ab_1 + a_1b)^2.$$

Если же перемножить первый и четвертый и второй с третьим, то получим $(a^2 + b^2) (a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (a_1b - ab_1)^2.$

Штейнер, Яков (1796—1863), известный немецкий математик, один из творцов новой геометрии, основы которой разработаны им в классическом произведении, где он трактует свойства алгебраических кривых и поверхностей, исключительно пользуясь геометрическими методами.

459. Из черт. 104 видно, что:

$$AG:GB = DH:HC$$

и

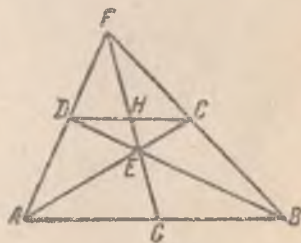
$$AG:GB = HC:DH.$$

Перемножение дает:

$$AG^2:GB^2 = 1,$$

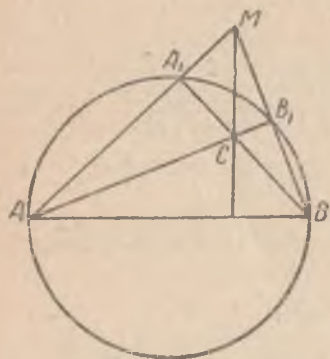
откуда

$$AG = GB.$$



Черт. 104.

460. Пусть требуется из точки M опустить перпендикуляр на прямую AB (черт. 105). Окружность предполагается уже начерченной.



Черт. 105.

Соединяем точку M с концами прямой AB . Пусть прямые AM и BM встречаются окружность в точках A_1 и B_1 . Проводим прямые AB_1 и A_1B . Если теперь точку C их встречи соединить с точкой M , то MC будет искомым перпендикуляром. Действительно, углы AA_1B и AB_1B прямые, следовательно, A_1B и AB_1 служат треугольнику AMB высотами, а третья высота должна пройти через точку их пересечения C .

461. Пусть ADB — неравносторонний треугольник (черт. 106), причем $AD + DB = AC + CB$. Треугольники ACB и ADB имеют общую

часть AEB , следовательно, для доказательства предложения достаточно показать, что треугольник BED меньше треугольника AEC . Но если отложить на EA и EC соответственно $EF = EB$ и $EG = ED$, то остается показать, что точка F упадет между A и E , а точка G — между C и E . Точка F упадет между A и E , так как угол β , равный углу α , больше угла γ , следовательно, $EA > EF$. Далее, если G падает между E и C , то $FG + GE < FC + CE$, или по прибавлении к обеим частям неравенства по $AF + FE$:

$$AF + FG + GE + FE < AF + FC + CE + EF;$$

но $EG = ED; FG = BD$

и

$$EF = EB,$$

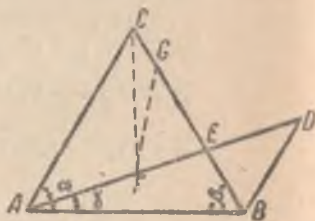
а потому

$$AD + DB < AF + FC + CB,$$

или

$$AC + CB < AF + FC + CB,$$

откуда $AC < AF + FC$.



Черт. 106.

Это неравенство очевидно, и, следовательно, справедливо, что точка G лежит между C и E .

462. Проводим прямые GH и FH (черт. 107). Возьмем на GH произвольную точку A и проведем прямые AD , AF . Через точку C пересечения прямых FH и AD и через G проводим прямую GCI , пересекающую AF в точке I . Линия HI есть искомая параллель.

Бинэ, Жан Филипп (1786—1856), французский астроном, профессор Политехнической школы. Его работы относятся преимущественно к области анализа, теории уравнений, теории вероятностей и механики.

463. Решение Бинэ. Данные уравнения выражают своим составом, что $U^3 + xU^2 + yU + z$ обращается трижды в нуль при подстановке вместо U количеств a , b и c , следовательно, он делится на произведение $(U - a)(U - b)(U - c)$, при чем частное равно единице, потому что первый член делителя есть U^3 . Получаем тождество:

$$U^3 + xU^2 + yU + z = (U - a)(U - b)(U - c),$$

или

$$U^3 + xU^2 + yU + z = U^3 - (a + b + c)U^2 + (ab + ac + bc)U - abc,$$

откуда

$$x = -(a + b + c),$$

$$y = ab + ac + bc,$$

$$z = -abc.$$

Бурдон, Луи Пьер (1799—1854) французский педагог-математик, автор распространенных курсов по элементарной математике. Его „Элементы алгебры“ выдержали более 20 изданий, „Элементы арифметики“ — до 40 изданий.

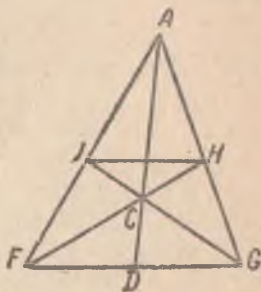
464. Вопрос сводится к решению системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ z = 2x \\ 100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x. \end{cases}$$

$x = 3$; $y = 2$; $z = 6$. Искомое число 326.

465. Пусть пропорция будет $u : x = y : z$, тогда по условию

$$u + z = 2S; x + y = 2S_1; u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4C^2.$$



Черт. 107.

Решение Бурдона. Пусть $uz = p$, тогда, комбинируя с уравнением $u + z = 2S$, имеем u и z как корни квадратного уравнения, выраженные через p . Аналогично $xu = p$ и $x + u = 2S_1$ дает x и u в зависимости от p . Подставляя в уравнение

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 4C^2,$$

найдем

$$p = S^2 + S_1^2 - C^2,$$

вместо подстановкой найденного значения p получим x, y, z, u .

Примечание. Без указанного искусственного приема решение ведет к весьма сложным вычислениям.

466. Мондэ Анри, сын крестьянина из селения около города Тура. В 1840 г. он будучи еще мальчиком был представлен президенту Парижской академии наук, знаменитому французскому математику Понселе. Собравшиеся члены академии задали мальчику два вопроса: чему равен квадрат 756 и сколько минут в 52 годах. Он немедленно дал правильные ответы. После этого была организована комиссия, в состав которой, как сказано, вошли виднейшие математики. Доклад об испытании был составлен к заседанию 14 декабря 1840 г. Огюстеном Коши. Когда Мондэ предложили эту задачу, то он сейчас же дал ее решение: 66 и 67. Тогда ему указали, что есть решение в более простых числах. После момента размышления он сказал, что второе решение: 6 и 13. Способ Мондэ основан на применении тождества:

$$x^2 - y^2 = (x - y)^2 - 2y(y - x) = (x - y)^2 + 2y(x - y),$$

т. е. вопрос сводится к тому, чтобы из числа 133 вычесть такой квадрат, чтобы остаток делился на удвоенный квадратный корень. Испытывая квадраты 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ..., видим, что только 1 и 49 удовлетворяют этому условию:

$$\frac{133 - 1}{2} = 66; \quad \frac{133 - 49}{14} = 6.$$

Обычный путь таков:

$$(x + y)(x - y) = 1 \cdot 133 = 19 \cdot 7.$$

Монферрье, французский математик, автор ряда учебных курсов по математике, издавший в 3 томах „Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées“ (2-е издание вышло в 1838 г.).

467. Составляем систему:

$$x + y = p,$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = q,$$

откуда

$$x = \frac{m(nq - p)}{n - m}; \quad y = \frac{n(p - mq)}{n - m}.$$

Например, если

$$p = 17; \quad m = 3; \quad n = 4; \quad q = 5,$$

то

$$x = 9; \quad y = 8.$$

468. Нетрудно видеть, что уравнению удовлетворяет значение $x_1 = 1$.

Поэтому, деля на $x - 1$, получим:

$$x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$(x^5 + 1) + 4x(x^3 + 1) + 6x^2(x + 1) = 0,$$

откуда

$$x_2 = -1$$

и

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Это уже обычное возвратное уравнение 4-й степени. Деля на

x^2 и делая подстановку $x + \frac{1}{x} = z$, легко найдем:

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{-2 - 6\sqrt{5}}}{4};$$

$$x_{5,6} = \frac{-3 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-2 \pm 6\sqrt{5}}}{4}.$$

$$469. \quad x^4 + x^3 + 4x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 7x - 28x - 28 = 0;$$

$$x^3(x + 1) + 4x^2(x + 1) - 7x(x + 1) - 28(x + 1) = 0; \quad x_1 = -1.$$

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 28 = 0;$$

$$x^2(x + 4) - 7(x + 4) = 0;$$

$$x_2 = -4; \quad x^2 - 7 = 0; \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{7}.$$

470. Пусть $b^x = z$; $a^z = c$; $z \lg a = \lg c$, откуда $z = \frac{\lg c}{\lg a} = m$;

теперь $b^x = m$; $x \lg b = \lg m$, следовательно, $x = \frac{\lg m}{\lg b}$, т. е.

$$x = \frac{\lg \left[\frac{\lg c}{\lg a} \right]}{\lg b}.$$

Пуассон, Симон Дени (1781—1840), знаменитый французский математик, работавший по преимуществу в высших областях математики. Кроме значительного числа специальных исследований, относящихся к анализу, теории уравнений, механике и астрономии, он написал двухтомный „Трактат о механике“.

471. По поводу этой задачи Араго рассказывает, что она решила судьбу Пуассона, так как, заинтересовавшись ею, он тем самым открыл свое призвание и всю жизнь посвятил математике. Мы уже видели подобную задачу (336). Эта имеет также 2 решения:

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

За подробностями теоретического характера можно обратиться к книге В. Аренса „Математические игры“.

Лебег, В. А., французский математик, профессор факультета наук в Бордо. Эта задача взята из его „Упражнений по численному анализу“, посвященных неопределенному анализу и теории чисел (1859 г.).

472. Сразу найдем $z = 9$ и $2x + 3y = 68$, откуда обычным путем: $y = 0, 2, 4, \dots, 22$. Всего 12 решений

Шлёмилх, Оскар (1823—1901), известный немецкий математик, имя которого связано с выражением остаточного члена ряда Тэйлора. Автор весьма полезного курса высшей математики.

473. Известно, что между корнями x_1, x_2, x_3 и коэффициентами a, b, c уравнения 3-й степени $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ существует зависимость:

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad (1)$$

$$b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \quad (2)$$

$$c = -x_1x_2x_3. \quad (3)$$

1) Если корни составляют арифметическую прогрессию, то имеем лишнее условие:

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3, \quad (4)$$

тогда из (1) и (4)

$$x_2 = -\frac{a}{3};$$

из (1) и (3)

$$x_1 + x_3 = -\frac{2}{3}a;$$

$$x_1x_3 = \frac{3c}{a},$$

откуда

$$x_1 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}},$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}}.$$

Если найденные корни подставим в (2), то получим условие, которому должны удовлетворять коэффициенты для того, чтобы кубическое уравнение имело корни, представляющие арифметическую прогрессию. Это условие будет:

$$\frac{2a^3 + 27c}{9a} = b.$$

Наоборот, раз имеется такая связь между коэффициентами, корни уравнения будут членами арифметической прогрессии.

2) Если корни уравнения представляют геометрическую прогрессию, то добавляется условие:

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3. \quad (5)$$

Из (5) и (3) следует:

$$x_2 = \sqrt[3]{-c}; \quad x_1 x_3 = \sqrt[3]{c^2}; \quad (6)$$

из (1):

$$x_1 + x_3 = -a + \sqrt[3]{c}; \quad (7)$$

из (6) и (7) получим:

$$x_1 = -\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{c^2}},$$
$$x_3 = -\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{c^2}}.$$

Подставляя x_1, x_2, x_3 во (2), находим условие:

$$b = a\sqrt[3]{c},$$

при котором корни кубического уравнения образуют геометрическую прогрессию. Обратно, при наличии этого условия корни непременно будут членами геометрической прогрессии.

3) Если корни представляют гармонический ряд, то прибавляется условие:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{x_1}{x_3},$$

или

$$2x_1 x_3 = x_2(x_1 + x_3). \quad (8)$$

из (2) и (8) получим:

$$x_1 x_3 = \frac{b}{3}, \quad (9)$$

а из (3):

$$x_2 = -\frac{3c}{b}.$$

Подставляя в (8), найдем:

$$\frac{2}{3} b = -\frac{3c}{b} (x_1 + x_3). \quad (10)$$

Из (9) и (10):

$$x_1 = -\frac{b^2}{9c} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{9c}\right)^2 - \frac{b}{3}};$$
$$x_3 = -\frac{b^2}{9c} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{9c}\right)^2 - \frac{b}{3}}.$$

Подставляя x_1, x_2, x_3 в (1), получаем условие:

$$\frac{2b^3 + 27c}{9bc} = a,$$

при котором корни представляют гармонический ряд.

474. Полагая $n > p + 1$ и умножив на p обе части неравенства, имеем:

$$np > p^2 + p,$$

или

$$np + n > p^2 + p + n,$$

откуда

$$(n - p)(p + 1) > n.$$

Полагая p последовательно равным $0, 1, 2, \dots, (n - 1)$, получим:

$$n \cdot 1 = n,$$

$$(n - 1) \cdot 2 > n,$$

$$(n - 2) \cdot 3 > n,$$

$$(n - 3) \cdot 4 > n,$$

$$\begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 2 \cdot (n - 1) > n, \end{array}$$

$$1 \cdot n = n.$$

Перемножая, получим:

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots n^2 > n^n.$$

Бертран, Жозеф (1822—1900), знаменитый французский математик, бывший уже в 17 лет доктором математики, автор классического трактата по дифференциальному и интегральному исчислению. На русский язык переведены его курсы арифметики и алгебры. На последнем воспитался целый ряд поколений.

475. Возводим в куб:

$$\begin{aligned} & 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + \\ & + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})^2(20 - 14\sqrt{2})} + \\ & + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})^2} = \\ & = 40 + 12\sqrt[3]{400 - 392} = 40 + 24 = 64. \end{aligned}$$

Другой прием:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8 + 12 + 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} = \\ & = \sqrt[3]{2^3 + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}. \quad (2)$$

Сумма (1) и (2) = 4.

476. Преобразуем:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \pm \sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2^2 - 3}}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2^2 - 3}}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

На основании этого данное выражение примет вид:

$$\frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2 + (\sqrt{3} + 1)} + \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{2}}{2 - (\sqrt{3} - 1)}.$$

или

$$\sqrt{2} \left\{ \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{6} \right\} = \sqrt{2}.$$

477. Указание. Возвести обе части в куб.

478. Указание. Возводим сначала в куб, потом в квадрат; тогда будет легко определить x .

479. Поделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{1 - x^2}$, получим:

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Положив

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = z,$$

приведем уравнение к виду:

$$z - \frac{1}{z} = 1,$$

г. е.

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

Дальнейшее ясно.

480. Основание равно 3.

Бахвитц — немецкий математик.

481. Пусть $N = A^2 + B^2 + C^2$. Умножим N на сумму других трех квадратов:

$$(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2) = \\ = (Aa + Bb + Cc)^2 + (Ab - Ba)^2 + (Bc - Cb)^2 + (Ca - Ac)^2,$$

откуда

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(Ab - Ba)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \\ + \frac{(Bc - Cb)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(Ca - Ac)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Если положить

$$a = x^2 + y^2 - z^2, \quad b = 2xz, \quad c = 2yz,$$

то получим:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left[\frac{Aa + Bb + Cc}{x^2 + y^2 + z^2} \right]^2 + \left[\frac{Ab - Ba}{x^2 + y^2 + z^2} \right]^2 + \\ + \left[\frac{Bc - Cb}{x^2 + y^2 + z^2} \right]^2 + \left[\frac{Ca - Ac}{x^2 + y^2 + z^2} \right]^2.$$

482. Пусть каждый мужчина купил x вещей, следовательно, заплатил за них x^2 пенсов. Каждая женщина купила y вещей и заплатила y^2 пенсов. По условию

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 63.$$

При этом x и y числа целые, следовательно, возможны три комбинации:

$$63 \cdot 1 = 21 \cdot 3 = 9 \cdot 7.$$

Имеем:

$$1) \quad x + y = 63; \quad 2) \quad x + y = 21; \quad 3) \quad x + y = 9;$$

$$x - y = 1; \quad x - y = 3; \quad x - y = 7;$$

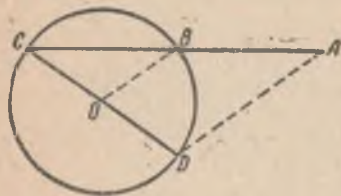
$$1) \quad x = 32; \quad y = 31; \quad 2) \quad x = 12; \quad y = 9; \quad 3) \quad x = 8; \quad y = 1.$$

Разность 23 может быть между 32 и 9, следовательно, 32 вещи куплены Джоном, 9 — Китти, разность 11 может быть между 12 и 1, следовательно, Питер купил 12 вещей, а Мэри — одну. Наконец, Алексис купил 8 вещей, а Дженни — 31. Ясно, что женой Джона была Дженни, Питера — Китти и Алексиса — Мэри.

Каталан, Эжень (1814—1894), бельгийский математик, наряду с работой в области высшей математики уделявший много внимания элементарной. Весьма ценны его „Математические заметки“ (3 тома).

Приводимые здесь задачи взяты из книги „Теоремы и проблемы элементарной геометрии“.

483. Пусть AC — искомая секущая (черт. 108). Соединим C с O



Черт. 108.

и, продолжив CO до встречи с окружностью в точке D , соединим последнюю с данной точкой A . В треугольнике ACD точка B — середина AC и точка O — середина CD . Следовательно, линия OB параллельна AD и равна ее половине. Следовательно, AD равна диаметру данного круга. Отсюда построение. Из точки A засе-

каем дугу радиусом, равным диаметру данного круга, и проводим диаметр DC . Точку C соединяем с A . Линия AC — искомая.

484. Пусть радиус данной окружности $OD = R$ (черт. 109), радиус $O_1D = r$, апофема $OP = O_1P = a$, тогда $R = r + 2a$. В правильном пятиугольнике

$$a = \frac{1}{4}r(\sqrt{5} + 1),$$

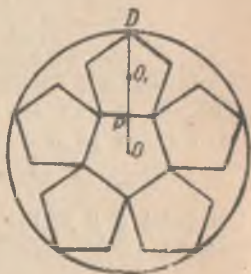
следовательно, $R = \frac{1}{2}r(3 + \sqrt{5})$,

откуда

$$r = \frac{1}{2}R(3 - \sqrt{5}).$$

Это выражение легко построить.

Сторона правильного десятиугольника, вписанного в данный круг:

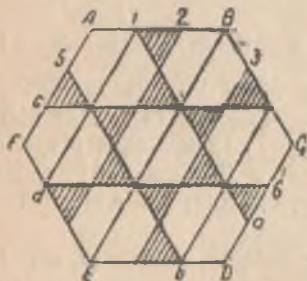


Черт. 109.

$$d = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

следовательно, $r + d = R$, т. е. r есть меньшая часть радиуса данного круга, разделенного крайнем и среднем отношении. Но $OO_1 = 2a = R - r = d$, т. е. расстояние между центрами O и O_1 равно стороне десятиугольника, вписанного в данный круг.

485. Указание. Достаточно разделить стороны AB , BC , AF , CD (черт. 110) каждую на три



Черт. 110.

равные части и провести линии 1, 2, BE, 3, 4 параллельно AF, линии 1a, 5b параллельно BC, наконец, 4c, 6d параллельно AB.

486. Пусть радиус шара R (черт. 111), радиус основания сегмента y , высота его x . Тогда, согласно условию:

$$\frac{V_{\text{сегм.}}}{V_{\text{сфер.}}} = \frac{1}{2} \frac{\pi y^2 x + \frac{1}{3} \pi x^3}{\frac{2}{3} \pi R^2 x} = m.$$

После упрощения:

$$\frac{3y^2 + x^2}{4R^2} = m,$$

откуда

$$3y^2 + x^2 = 4R^2 m, \quad (1)$$

но

$$y^2 = x(2R - x),$$

следовательно, после замены y^2 равенство (1) переписывается так:

$$3x(2R - x) + x^2 = 4R^2 m,$$

или

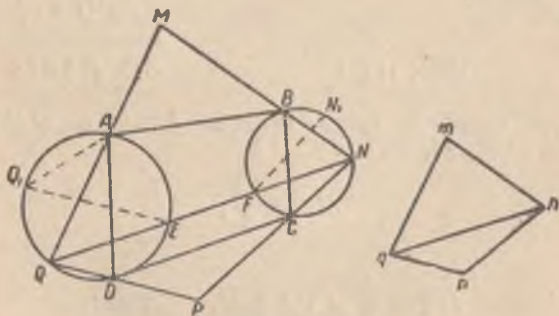
$$x^2 - 3xR + 2R^2 m = 0.$$

Нейберг, Иосиф, бельгийский математик, профессор университета в Льеже, автор прекрасного курса „Анализа бесконечно малых“.

487. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ (черт. 112), и около него требуется описать четырехугольник $MNPQ$, подобный дру-



Черт. 111.



Черт. 112.

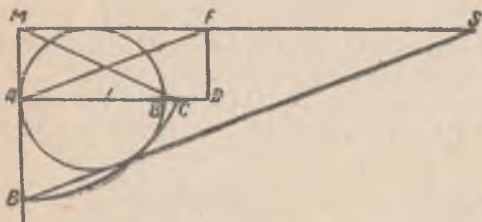
тому данному четырехугольнику $mnpq$. Вершины Q и N должны лежать на дугах AQD и BNC , вмещающих углы mqr и mnp . Если E и F — пересечения диагонали QN с продолжениями этих дуг, то, найдя их, решим задачу. Но $\angle MQN = \angle mqn$ и $\angle MNQ = \angle mnq$, которые известны. Берем произвольные точки Q_1 и N_1 на окружностях и строим $\angle AQ_1E = \angle mqn$ и $\angle BN_1F = \angle mnq$. Раз найдены точки E и F , фигура $MQPN$ определена.

Бретшнейдер, немецкий историк математики, главным образом греческой. Его монография „Геометрия и геометры до Евклида“ (Лейпциг, 1870) есть в русском переводе.

488. Так как $146 = 11^2 + 5^2$, то вопрос сводится к построению выражения

$$\pi = \frac{13\sqrt{11^2 + 5^2}}{50}.$$

Делим диаметр AB (черт. 113) на 10 равных частей и на продолжении его откладываем $BC = \frac{1}{10} AB$ и $CD = \frac{2}{10} AB$. На касательной в конце A диаметра откладываем от A длину радиуса AM . Тогда гипотенуза MC будет изображать $\frac{1}{5} \sqrt{11^2 + 5^2}$.



Черт. 113.

Опишем радиусом MC дугу из M , пересекающую касательную в R . Из M проводим вторую касательную MS , строим прямоугольник $AMFD$ и проводим RS параллельно диагонали AF . Длина касательной $MS = 2\pi$. Действительно, из подобия треугольников AMF и RMS имеем: $MS:MF = MR:MA$, но

$$MF = \frac{13}{5},$$

а

$$MR = \frac{1}{5} \sqrt{11^2 + 5^2}, \quad MA = 1,$$

следовательно,

$$MS = \frac{13}{25} \sqrt{146} = 2\pi$$

с точностью до пяти десятичных знаков.

Желен, Е., педагог-математик, автор нескольких элементарных курсов.

489. К числителю и знаменателю надо прибавить по 7.

490. Указание. По окончании раздела у всех по $\frac{1}{5}$ суммы, следовательно, до удвоения у четырех по $\frac{1}{10}$, у 5-го $\frac{6}{10}$; перед вторым удвоением у первых трех по $\frac{1}{20}$, у 4-го $\frac{11}{20}$, у 5-го $\frac{6}{20}$; перед третьим удвоением у первых двух по $\frac{1}{40}$, у 3-го $\frac{21}{40}$, у 4-го $\frac{11}{40}$, у 5-го $\frac{6}{40}$; перед четвертым удвоением у 1-го $\frac{1}{80}$, у 2-го $\frac{41}{80}$, у 3-го $\frac{21}{80}$, у 4-го $\frac{11}{80}$, у 5-го $\frac{6}{80}$; перед пятым удвоением у 1-го $\frac{81}{160}$, у 2-го $\frac{41}{160}$, у 3-го $\frac{21}{160}$, у 4-го $\frac{11}{160}$, у 5-го $\frac{6}{160}$. Но при этом у первого 81 дукат, следовательно, всего было 160 дукатов.

Руше, Е. и Комберусс, Ш. — французские математики, совместно работавшие по составлению курсов и учебных руководств, пользующихся заслуженной известностью.

491. Ответ. Отношение объемов равно отношению смежных сторон.

492. Если измерения прямоугольника x и y , то диагональ равна

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Так как по условию $\pi x^2 y = a$ и $\pi y^2 x = b$, то

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Перемножение объемов дает $\pi^2 x^3 y^3 = ab$, откуда

$$xy = \sqrt[3]{\frac{ab}{\pi^2}} \quad (2)$$

Из (1):

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

и

$$\frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2},$$

или

$$y^2 + x^2 = y^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}. \quad (3)$$

Перемножение (1) и (2) дает:

$$y^2 = \frac{b}{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{\pi^2}}.$$

Подставляем в (3) и находим

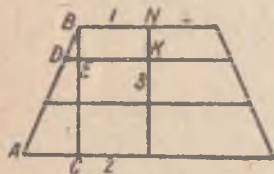
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{ab}} \cdot \sqrt[6]{\frac{ab}{\pi^2}}.$$

493. Пусть объемы искомых частей v_1, v_2, v_3 , так что

$$v_1 : v_2 : v_3 = 2 : 3 : 7.$$

Полный объем $v = 7\pi$, значит,

$$v_1 = \frac{7}{6} \pi; \quad v_2 = \frac{7}{4} \pi; \quad v_3 = \frac{49}{12} \pi.$$



Черт. 114.

Треугольники ACB и DEB (черт. 114) подобны, следовательно:

$$AC : BC = DE : BE,$$

или

$$1 : 3 = (r_1 - 1) : h_1,$$

где $r_1 = DK$ и $h_1 = NK$. Отсюда $h_1 = 3(r_1 - 1)$.

Объем

$$v_1 = \frac{7}{6} \pi = \frac{\pi h_1}{3} (r_1^2 + 1 + r_1),$$

откуда

$$\frac{7}{2} = h_1 (r_1^2 + 1 + r_1) = 3(r_1 - 1) (r_1^2 + 1 + r_1),$$

или

$$\frac{7}{6} = r_1^3 - 1$$

и

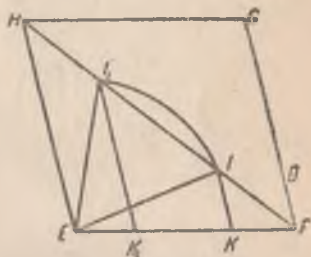
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{13}{6}}; h_1 = 3 \left(\sqrt[3]{\frac{13}{6}} - 1 \right).$$

Аналогично найдем r_2 и h_2 .

Бальтцер, Рихард, немецкий математик-педагог, курс которого „Элементы математики“ пользовался в Германии огромной популярностью.

494. Пусть EF (черт. 115) — данная сумма, $\angle CFE$ — данный. Строим ромб $EFCH$, так что $\angle HFE = \frac{1}{2} \angle CFE$. Описываем из E

радиусом, равным данной стороне, дугу, пересекающую диагональ HF в точках I и I_1 . Проводим IK и I_1K_1 параллельно FC . Треугольник EIK и EI_1K_1 — искомые (два решения).



Черт. 115.

$$495. y = \frac{f - ax}{b},$$

$$cx^2 + \frac{d}{b^2} (f - ax)^2 = g,$$

$$x = \frac{adf \pm b \sqrt{(a^2d + b^2c)g - cdf^2}}{a^2d + b^2c}.$$

Если радикал обозначим через R , то

$$x = \frac{adf \pm bR}{a^2d + b^2c}; y = \frac{bcf \mp aR}{a^2d + b^2c}.$$

496. Из 1-го уравнения $x^2 + y^2 + 2xy = 3xy$,

или

$$(x + y)^2 = 3xy.$$

Подстановка из 2-го уравнения дает $(x + y)^2 - 3(x + y) = 0$. Теперь имеем системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Дальнейшее ясно.

497. $(a + b \lg x) \lg x = \lg c$; пусть $\lg x = y$, тогда

$$by^2 + ay - \lg c = 0.$$

Найдя y , легко найдем x .

Штурм, Яков-Карл (1803—1855), родом из Швейцарии, автор важной теоремы высшей алгебры, носящей его имя. Автор двухтомного курса анализа, до сего времени не утратившего своего научно-педагогического значения.

498. Решение Штурма. Искомое число дней x . Путь, пройденный первым курьером, есть сумма членов арифметической прогрессии, крайние члены которой 10 и $10 + \frac{x-1}{4}$, т. е. она равна $\left(20 + \frac{x-1}{4}\right) \frac{x}{2}$, или $\frac{(79+x)x}{8}$. Второй курьер находится в дороге до встречи с первым $x-3$ дня и проезжает

$$\left[14 + \frac{(x-4) \cdot 2}{3}\right] \cdot \frac{x-3}{2},$$

или

$$\frac{(17+x)(x-3)}{3} \text{ лье.}$$

По условию

$$\frac{(79+x)x}{8} - \frac{(17+x)(x-3)}{3} - 40 = 0, \quad (1)$$

или

$$5x^2 - 125x + 552 = 0, \quad (2)$$

откуда

$$x_1 = 5,72 \dots, x_2 = 19,27 \dots$$

Предполагалось, что x — число целое, следовательно, корни уравнения как бы не отвечают условию. Но можно показать, что целые части корней (5 и 19) означают, что были две встречи: одна по истечении 5, вторая 19 дней.

Во-первых, если a есть путь первого курьера, а b — путь второго, увеличенный на 40 лье, то, полагая, что первый находится в пути целое число x , а второй целое число $x-3$ дней, имеем тождество:

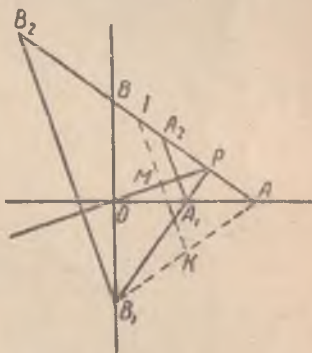
$$5x^2 - 125x + 552 = 24(b-a). \quad (3)$$

Это очевидно, так как уравнение (2) выведено из (1) перемной знаков у всех членов и умножением их на 24. Подставим теперь в левую часть 2-го уравнения вместо x сначала 5, потом 6, так как меньший корень 5,72... содержится между этими числами; тогда результат первой подстановки > 0 , а второй < 0 . Но в силу тождества (3) разность $b - a$ всегда имеет одинаковый знак с трехчленом $5x^2 - 125x + 552$; следовательно, в конце 5-го дня $a < b$, а в конце 6-го дня $a > b$. Итак, первая встреча, как и было сказано, имела место между пятым и шестым днем. Подобно этому докажем, что вторая встреча имела место через 19 дней. Возможность этой второй встречи легко понять, так как второй курьер, увеличивая свою скорость более первого, встретит его, будучи сначала перегнан первым. Это подтверждается исследованием, в конце скольких дней оба курьера имеют одинаковую скорость. Найдем число дней 13, содержащееся между 5 и 19.

Манигейм, известный французский геометр.

499. Предложение будет доказано, если доказать, что середины прямых AB_2 и BA_2 (черт. 116) совпадают, так как тогда $AA_2 = BB_2$ и следовательно, $AB = A_2B_2$. Углы AOB_1 и APB_1 — прямые, поэтому четырехугольник $OPAB_1$ есть вписанный в круг диаметра AB_1 , следовательно, перпендикуляр к хорде OP этого круга в ее середине M пройдет через центр круга, т. е. пересечет AB_1 в ее середине (точка K), а так как перпендикуляры B_1B_2 и KM к OP параллельны, то прямая MK пересечет и прямую AB_2 в ее середине I . Аналогично по отношению к четырехугольнику $OBPA_1$, вписанному в круг диаметра A_1B убеждаемся, что перпендикуляр MK , будучи параллелен прямой A_1A_2 и проходя через середину диаметра A_1B , (как перпендикуляр, восстановленный из середины хорды, OP), встречает отрезок A_2B в его середине. Но отрезки AB_2 и A_2B лежат на одной прямой, следовательно, середины этих отрезков совпадают.

Кэзи, английский математик, профессор университета в Ирландии. Автор интересной книги „Новейшая элементарная геометрия“, переведенной на французский язык.



Черт. 116.

500. Пусть x, y, z — расстояния произвольной точки (в плоскости треугольника) от его сторон a, b и c . Воспользуемся тождеством Лагранжа:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Так как $ax + by + cz = 2S$, где S — площадь данного треугольника, то $x^2 + y^2 + z^2$ будет minimum, как легко видеть, при условии

$$ay - bx = 0,$$

$$bz - cy = 0,$$

$$cx - az = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Примечание. Определяемая этими условиями точка находится в пересечении симедиан треугольника и называется точкой Лемуана.

501. Задача основана на том, что сумма двух взаимно обратных дробей > 2 .

Действительно: пусть a и b — два неравных числа, например: $a > b$, тогда

$$a - b > 0;$$

$$(a - b)^2 > 0;$$

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0;$$

$$a^2 + b^2 > 2ab;$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Пусть теперь плечи весов m и n , груз товара на левой чашке весов x , а на правой y . Тогда

$$x \cdot m = 1 \cdot n,$$

$$y \cdot n = 1 \cdot m,$$

откуда

$$x = \frac{n}{m}, y = \frac{m}{n}.$$

Сумма

$$x + y = \frac{n}{m} + \frac{m}{n} > 2,$$

следовательно, торговец остался в убытке.

502. Можно преобразовать данное выражение так:

$$\begin{aligned} n(n^2 - 1)(n^2 - 5n + 26) &= (n - 1)n(n + 1)[(n^2 - 5n + 6) + 20] = \\ &= (n - 1)n(n + 1)[(n - 2)(n - 3) + 20] = \\ &= (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1) + 20(n - 1)n(n + 1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое, как произведение пяти последовательных целых чисел, кратно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, а произведение $(n - 1)n(n + 1)$ трех последовательных целых чисел кратно произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; все второе слагаемое, следовательно, кратно 120.

503. Пусть стороны искомого треугольника $x - 1, x, x + 1$, а площадь $x + 2$, тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{3x(x + 2)(x - 2)}x &= 4(x + 2); \\ 3x^2(x^2 - 4) &= 16(x + 2)^2; \\ 3x^2(x - 2) &= 16(x + 2); \\ 3x^3 - 6x^2 - 16x - 32 &= 0; \\ 3x^3 - 12x^2 + 6x^2 - 24x + 8x - 32 &= 0; \\ 3x^2(x - 4) + 6x(x - 4) + 8(x - 4) &= 0; \\ (x - 4)(3x^2 + 6x + 8) &= 0; \end{aligned}$$

$$x_1 = 4; \quad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{3}.$$

Удовлетворяет только значение x_1 , следовательно, стороны треугольника 3, 4, 5, а площадь 6. Очевидно, треугольник прямоугольный.

504. Так как разность четных одинаковых степеней $4^{2p} - 3^{2p}$ кратна сумме оснований $(4 + 3)$, то данное выражение кратно 7.

Кроме того:

$$4^{2p} - 3^{2p} - 7 = 4^{2p} - 4 - (3^{2p} + 3) = 4(4^{2p-1} - 1) - 3(3^{2p-1} + 1).$$

Так как $4^{2p-1} - 1$ кратно $(4 - 1)$, т. е. кратно 3, а $3^{2p-1} + 1$ кратно $(3 + 1)$, т. е. кратно 4, следовательно, все выражение кратно произведению $3 \cdot 4 = 12$.

505. Второе из данных уравнений можно представить в виде:

$$\frac{yz + xz + xy}{xyz} = 1.$$

Подстановка из 3-го уравнения дает $xyz = 27$.

Теперь имеем:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 9, \\xy + xz + yz &= 27, \\xyz &= 27,\end{aligned}$$

следовательно, x , y и z — корни кубического уравнения

$$u^3 - 9u^2 + 27u - 27 = 0,$$

или $(u - 3)^3 = 0$, откуда $u = 3$, и, следовательно,

$$x = y = z = 3.$$

506. Указание. Это уравнение решается с помощью тождества Е. N. Barisien'a:

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 + (a + b)^4 &= (a^2 + ab + b^2)^2 + \\&+ a^2b^2 + a^2(a + b)^2 + b^2(a + b)^2,\end{aligned}$$

следовательно, если

$$\begin{aligned}u &= a^2 + ab + b^2, \\v &= ab, \\w &= a(a + b), \\t &= b(a + b),\end{aligned}$$

то

$$x = a; y = b; z = a + b.$$

507. 1) $a^p = x^{pl}$; $b^q = x^{mq}$; $c^r = x^{nr}$,
следовательно,

$$\frac{a^p \cdot b^q}{c^r} = x^{pl + mq - nr}.$$

Если

$$3^{pl + mq - nr} = \sqrt[5]{243} = 3^{\frac{5}{2}},$$

то

$$pl + mq - nr = 2\frac{1}{2}.$$

2) При наклонении чаши (положение II, черт. 117) вода не выльется из сегмента ABC , объем которого

$$V = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h),$$

где

$$h = KC = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

и $R = OB$; следовательно:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(2R + \frac{R\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{(3 - 2\sqrt{2})(4 + \sqrt{2})}{4}. \end{aligned}$$



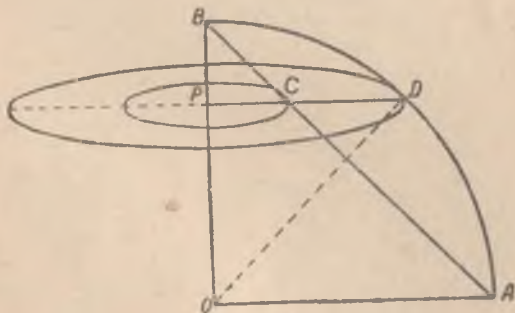
Черт. 117.

Объем полушара равен $\frac{2}{3} \pi R^3$. Объем сегмента в процентах выразится:

$$\begin{aligned} x &= \frac{100 \cdot V_{\text{сегм.}}}{V_{\text{полушара}}} = \frac{100}{8} \cdot (12 - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4) = \\ &= \frac{25}{2} (8 - 5\sqrt{2}) = 11\frac{5}{8}\%, \end{aligned}$$

т. е. выльется воды $88\frac{3}{8}\%$.

508. Пусть $OP = x$; тогда из $\triangle POD$:



Черт. 118.

$$PD^2 = a^2 - x^2.$$

По условию

$$\pi PD^2 - \pi PC^2 = \pi m,$$

или

$$PD^2 - PC^2 = m;$$

но

$$PC = PB = a - x;$$

следовательно,

$$a^2 - x^2 - (a - x)^2 = m;$$

$$2ax - 2x^2 = m;$$

$$2x^2 - 2ax + m = 0;$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2m}}{2}.$$

Так как $x < a$, то годны оба корня. Ясно, что, вообще говоря, $a^2 - 2m > 0$, т. е. $m < \frac{a^2}{2}$, но при $a^2 - 2m = 0$ m принимает наибольшее значение $m = \frac{a^2}{2}$, что соответствует значению

$$x = \frac{a}{2}.$$

42 п. 19-60 м.

НП 3-10-3

0-24